Lehrbuch

der

darstellenden Geometrie

von

Friedr. Aug. Klingenfeld,

ordentl. Professor der darstellenden Geometrie und der mechanischen Technologie an der k. polytechnischen Schule zu München.

Nürnberg,

B a u e r & R a s p e.

(Ludwig Korn.)

1871.

Lehrbuch

der

darstellenden Geometrie

von

F. A. Klingenfeld.

Band I.

Mit fünf Tafeln.

Nürnberg,
Bauer & Raspe.
(Ludwig Korn.)
1871.

BIBLIOTHECA · REGIA · MONACENSIS

Staatsbibliothek
Bamberg

Vorrede zur ersten Auflage.

Indem ich das vorliegende Lehrbuch der Oeffentlichkeit übergebe, beabsichtige ich damit nicht blos, meinen Schülern einen Leitfaden für meinen Unterricht in die Hand zu geben, sondern wünsche ich auch, dass sich dasselbe einer weiteren Verbreitung erfreuen möge, und zwar hauptsächlich desshalb, weil in ihm einige Abweichungen von bisher gebräuchlichen Regeln enthalten sind, von welchen (Abweichungen) ich mir bezüglich der Anwendung der darstellenden Geometrie auf technisches Zeichnen einen guten Erfolg verspreche. Es enthielt nemlich diese Wissenschaft bisher einige Bestimmungen, die ihrer praktischen Anwendung hinderlich im Wege lagen, und deren schädliche Wirkung Der am leichtesten zu erkennen Gelegenheit hat, der ausser der darstellenden Geometrie noch einen Gegenstand zu lehren hat, in welchem sie zur Anwendung kommt (wie dies z. B. bei mir der Fall ist, dem ausser dem Unterricht in der darstellenden Geometrie auch der im Maschinenzeichnen übertragen ist). In der darstellenden Geometrie war nemlich bisher festgesetzt und waren die Auflösungen ihrer Aufgaben darnach eingerichtet:

1) dass man den Tafeln bei ihrer Umklappung ihre Schnittlinie gemeinschaftlich behalten lässt, 2) dass eine Ebene erst dann als hinreichend bekannt zu betrachten ist, wenn ihre Spuren gezeichnet sind, während man in der Praxis (beim Maschinen- und Bauzeichnen) sehr oft die Tafeln so umzuklappen gezwungen ist, dass sie zwei verschiedenen Blättern angehören, und von den Spuren einer Ebene nie eine Rede ist. Ebensowenig pflegt man in der Anwendung, wie dies in der darstellenden Geometrie verlangt wird, die Schnittlinie der beiden Tafeln in ihren Umklappungen zu zeichnen, sondern man hält es damit, wie in Num. 16. angegeben ist. Ausserdem fehlt es in den bisher erschienenen Lehrbüchern der darstellenden Geometrie an einer ausführlichen durch Zeichnungen erläuterten Auseinandersetzung des Uebergangs von einem Projectionssystem zu einem andern, was doch für die Anwendung von so grosser Wichtigkeit ist.

Den genannten Mängeln abzuhelfen war seit mehreren Jahren mein Streben, dessen Erfolg aus dem vorliegenden Buche beurtheilt werden kann. Mag dieses Urtheil ausfallen, wie es will, man wird nicht verkennen können, dass die genannten Mängel wirklich vorhanden sind; dass das Ziel, zu dem ich gelangt bin, nur durch Aufwand von Mühe, Geduld und Zeit zu erreichen war; dass es namentlich nicht leicht war, eine Bezeichnungsart zu finden, durch die es möglich ist, den in diesem Buche aufgestellten Sätzen (welche durch die Beseitigung der oben genannten Mängel zusammengesetzter sind, als sie bisher waren) eine einfache Form zu geben; dass ich daher hinreichende Gründe hatte zur Herausgabe dieses Buchs.

Wer die §§. 1. und 4. sorgfältig durchgeht, wird der von mir eingeführten Bezeichnung schwerlich Zweckmässigkeit und Consequenz absprechen können; er wird auch zugestehen müssen, dass sich die bisher eingeführte Bezeichnungsweise nicht in der Art hätte durchführen lassen; er wird es daher verzeihlich finden, wenn ich gleich bei meinem ersten literarischen Auftreten es wage, neue Bezeichnungen einzuführen. Wenn ich dabei weiter gehe, als nothwendig ist, wenn ich statt des Ausdruckes „Projection“ das Wort „Riss“ zu gebrauchen mir erlaube, so mag man dies meiner Liebe zur deutschen Sprache zu Gute halten, die es nicht über sich gewinnen konnte, das deutsche Wörtchen „Riss“ noch länger aus der Sprache der darstellenden Geometrie zu verbannen, um es durch ein anderes, fremdes Wort zu ersetzen. Dass ich für den Durchschnitt zweier Tafeln den neuen, aber deutschen, Namen „Kante“ zum Vorschlag bringe, wird man mir um so weniger verargen, als man bis jetzt über die Bezeichnung dieser Linie noch nicht übereingekommen ist.

Mein Streben ging nicht blos dahin, die oben angedeuteten Abänderungen durchzuführen, sondern auch dahin, den Lehrstoff so anzuordnen, dass es eher möglich ist, allgemeine Regeln über die Lösung der verschiedenartigen Aufgaben zu geben. Schon bei der Durchlesung des Inhaltsverzeichnisses dieses Buches wird man sehen, dass ich alle

Aufgaben (in welchen aber blos gerade Linien und ebene Flächen vorkommen dürfen) unter zehn Paragraphe gebracht habe. An die Spitze der einzelnen Paragraphe habe ich allgemeine Betrachtungen gestellt, die dem Schüler den Weg zeigen, auf welchem er die Auflösung der zu dem entsprechenden §. gehörigen Aufgaben findet, die es ihm daher möglich machen, auch ähnliche andere dahin gehörige Aufgaben zu lösen, wenn sie ihm auch noch nicht vorgekommen sein sollten. Ausserdem habe ich mich bemüht, (im §. 8.) auf Alles aufmerksam zu machen, was dem Schüler in der darstellenden Geometrie zu wissen nöthig ist. Ferner habe ich die Aufsuchung des Durchschnittes von Prismen und Pyramiden (§. 10.) in einer Weise durchgeführt, die es möglich macht, die Ordnung, in der die gesuchten Punkte verbunden werden müssen, leicht zu übersehen. Ich glaube, dass dies den Lehrern der d. G. nicht unwillkommen sein wird.

Wenn ich hier die Punkte aufgezählt habe, in denen sich das vorliegende Buch von den frühern unterscheidet, so geschah dies nicht blos desshalb, um die Herausgabe desselben zu rechtfertigen, sondern auch darum, um den Beurtheiler dieses Werkchens zu veranlassen, sich über die Zweckmässigkeit der darin enthaltenen Abweichungen auszusprechen. Bedenkt man, wie sehr ich in Folge dieser Abweichungen bei der Bearbeitung dieses Buches auf mich selbst angewiesen war, so wird man bei der Beurtheilung desselben nicht zu strenge sein.

Nürnberg, im Januar 1851.

Der Verfasser.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Der Umstand, dass meine beiden Lehrbücher der darstellenden Geometrie, das für Gewerb- und das für polytechnische Schulen, nach und nach an den technischen Anstalten in Bayern immer mehr Boden gewonnen, und seit mehreren Jahren an den meisten dieser Ahstalten eingeführt sind, giebt mir die Ueberzeugung, dass der von mir eingehaltene Lehrgang sich des Beifalls der Lehrer der darstellenden Geometrie

zu erfreuen hat, und ich daher berechtigt bin, diesen Lehrgang in der neuen Auflage beizubehalten. Was aber den Umfang des Lehrstoffes betrifft, so finde ich mich durch den Umstand, dass das ganze Lehrbuch nun auch als Leitfaden für den Unterricht an technischen Hochschulen, namentlich an der technischen Hochschule zu München, dienen soll, veranlasst, denselben zu erweitern, und ihm die Anwendungen der darstellenden Geometrie auf Schattenkonstruktion und Perspektive beizufügen. Diesen gesammten Lehrstoff nun werde ich auf drei Bände vertheilen, von denen der erste, hier vorliegende, als zweite Auflage meines Lehrbuches der darstellenden Geometrie für Gewerbschulen zu betrachten ist, und die Aufgaben umfasst, in denen nur gerade Linien und ebene Flächen vorkommen. Dieser Band dient zugleich als Leitfaden für den Unterricht in der darstellenden Geometrie an den Gewerbschulen und Realgymnasien Bayerns.

Der zweite Band wird die Aufgaben über Curven und krumme Flächen enthalten, und ist zugleich als zweite Auflage meines Lehrbuches der darstellenden Geometrie für polytechnische Schulen zu betrachten. Dieser Band wird zu Anfang des nächsten zweiten Semesters im Buchhandel erscheinen.

Der dritte Band endlich wird die Schattenkonstruktion und die Perspektive enthalten.

Was den vorliegenden Band betrifft, so hat derselbe im Vergleich mit der früheren Auflage keine sehr bedeutende Erweiterung erfahren, und auch einer solchen nicht bedurft. Dass ich aber bestrebt war, überall zu verbessern und zu ergänzen, wird ein Vergleich mit der ersten Auflage wohl leicht ergeben.

Auch die Ausstattung des Buches ist, Dank dem bereitwilligen Entgegenkommen der Verlagsbuchhandlung, eine bessere geworden, als in seiner ersten Auflage.

So gebe ich mich denn der Hoffnung hin, es werde diese neue Auflage sich einer ebenso wohlwollenden Aufnahme zu erfreuen haben, als die erste.

München, im September 1871.

Der Verfasser.

Inhalt.

Erster Abschnitt.

Aufgaben über Punkte, Gerade und Ebenen.

§. 1. Graphische Bestimmung von Punkten, Geraden und Ebenen.

Seite

Nr. 1—10. Bestimmung und verschiedene Lagen von Punkten 1
11—14. Umklappen der Tafeln 9
15. Aufsuchung eines Punktes aus seinen Rissen 16
16. Man darf die $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ parallel verschieben 17
17. Risse von Raumgrössen (Spuren) 18
18—19. Graphische Bestimmung von Geraden 19
20. Bezeichnung derselben 21
21. Verschiedene Lagen derselben 22
22—25. Graphische Bestimmung von Ebenen 24
26. Zusammenstellung der eingeführten Bezeichnungen. Regel über die Zeichnung der Risse von Geraden 27

§. 2. Mittel, die gegenseitige Lage von Punkten, Geraden und Ebenen zu erkennen.

Nr. 27. Allgemeine Betrachtungen darüber 28
28—29. Punkt in einer Geraden oder Ebene 28
30—37. Gegenseitige Lage von Geraden und Ebenen 30

§. 3. Aufgaben über Punkte, Gerade und Ebenen.

Nr. 38. Allgemeine Betrachtungen darüber. Lehrsätze aus der Elementargeometrie 35
39—47. Schnitte von Geraden und Ebenen 38

Seite

Nr. 48—51. Das Gesuchte eine Ebene 44
52. Anleitung zur Aufsuchung einer Geraden 47
53—59. Das Gesuchte eine Gerade 48

§. 4. Uebergang zu einem anderen Risssystem.

Nr. 60. Allgemeine Betrachtungen darüber 53
62—64. Die $\mathfrak{T}_3 \perp \mathfrak{T}_1$ oder $\perp \mathfrak{T}_2$... 56
65—70. Uebergang auf ein beliebig anderes Tafelnsystem..... 59
73—75. Schiefe und Centralrisse 67

§. 5. Aufgaben über Punkte, Gerade und Ebenen, in welchen Entfernungen, Winkel gesucht sind.

Nr. 76—81. Aufgaben, in denen die $\mathfrak{T}_3 \perp \mathfrak{T}_1$ angenommen werden kann 71
82—83. Aufgaben, in denen die $\mathfrak{T}_3$ auf keiner alten Tafel senkrecht angenommen werden kann 76

§. 6. Aufgaben über Punkte, Gerade und Ebenen, in denen Entfernungen und Winkel gegeben sind.

Nr. 84. Allgemeine Regeln über derartige Aufgaben..... 79
85— 88. Aufgaben, in denen die $\mathfrak{T}_3$ auf einer alten Tafel senkrecht angenommen werden kann 79
89—101. Aufgaben, in denen die $\mathfrak{T}_3$ nicht $\perp \mathfrak{T}_1$ oder $\mathfrak{T}_2$ ist..... 81

§. 7. Aufgaben über das Dreikant.

Nr.102—103. Anzahl der Aufgaben. Bezeichnung..... 90
101. Die Seiten und Winkel eines bestimmten Dreikants zu finden..... 91
105—110. Auflösung der sechs Aufgaben über das Dreikant 92
111. Aufgabe, durch Dreikant gelöst 95

Zweiter Abschnitt.

Aufgaben über Körper, die von Ebenen begrenzt sind.

§. 8. Darstellung von Körpern.

Seite

Nr. 112. Zweckmässige Annahme der Tafeln 97
113. Grund-, Aufriss-, Detailzeichnungen 97
114—115. Ausziehen und Stricheln der Linien 99
116. Durchschnitt 101
117. Weglassen der Buchstaben 102
118. Vertauschen der Risse 102
119. Anfertigung von Körpern 103

§. 9. Aufsuchung der Risse eines Körpers.

120. Allgemeine Bemerkungen darüber 106
121—126. Risse eines Körpers bei freier Wahl der Tafeln 106
127. Risse eines Körpers, der gegen die Tafeln eine gegebene Lage hat 112
128. Regeln für das Aufnehmen von Körpern 114
129. Aufsuchung von Kanten, Seiten und Winkeln eines Körpers 115

§. 10. Durchschnitte von Körpern mit Ebenen, Geraden und Körpern.

Nr. 130. Schnitt eines Körpers mit einer unbegrenzten Ebene . 115
131—132. Schnitt eines Körpers mit einer Geraden 116
133. Schnitte von Ebene mit Pyramide 118
134. Ein dreiseitiges Prisma nach einem bestimmten Dreieck zu schneiden 119
135. Allgemeine Regeln über die Aufsuchung der Durchschnitte von Körpern 120
136. Schnitt von zwei aufeinander senkrechten Prismen ... 122
137—141. Durchschnitte von Pyramiden und Prismen 123
Anhang 129

Errata:

Seite 100, Zeile 20 v. o. wurde folgende Bemerkung *) vergessen:

*) Die hier betrachtete Körperkante soll einem konvexen Körper, d. h. einem solchen, dessen Oberfläche von einer Geraden nach höchstens zwei Punkten geschnitten wird, angehören.

Darstellende Geometrie.

Erster Abschnitt.

Aufgaben über Punkte, Gerade und Ebenen.

§. 1.

Graphische Bestimmung von Punkten, Geraden und Ebenen.

1. Wer die Wissenschaft, mit der wir uns beschäftigen wollen, die darstellende (descriptive) Geometrie, studiren will, hat die elementare Geometrie (Planimetrie und Stereometrie), die hier als bekannt vorausgesetzt wird, schon durchgemacht, und weiss, dass man in der Planimetrie nicht blos Lehrsätze beweist, sondern auch Aufgaben löst, in welchen geometrische Gebilde durch Zeichnung gesucht werden, die zu anderen, durch Zeichnung gegebenen Gebilden, in bestimmten Beziehungen stehen. In der Stereometrie werden dergleichen Aufgaben nicht gelöst. Warum? Weil in der Planimetrie jede Aufgabe nur solche Dinge enthält, die alle in einer einzigen Ebene liegen, nemlich in dem ebenen Zeichnungsblatte, auf welchem sie dargestellt sind, und die daher genau so gezeichnet werden können, wie sie sind. Anders in der Stereometrie. Diese betrachtet Gebilde, die nicht in einer einzigen Ebene liegen, und die sich daher auf einem ebenen Blatte nicht darstellen lassen. Wer vermöchte z. B. einen Würfel auf einem ebenen Blatte zu zeichnen? Will man daher stereometrische Aufgaben graphisch lösen, so müssen vor Allem die Mittel angegeben werden, durch die man Raumgebilde (die, wie gesagt, nicht gezeichnet werden können) graphisch bestimmt, d. h. Mittel, durch die es möglich

ist, Zeichnungen zu entwerfen, aus denen die Gestalten von zu bestimmenden Raumgrössen klar hervorgehen. Diese Mittel anzugeben, und durch dieselben geometrische Aufgaben aller Art graphisch lösen zu lehren, ist der Gegenstand der darstellenden Geometrie.

Wir können daher sagen:

Die darstellende Geometrie ist die Wissenschaft, welche geometrische Gebilde **graphisch** bestimmen und Aufgaben über dieselben **auf graphischem Wege** lösen lehrt.

2. Wir wollen zunächst nur solche geometrische Körper betrachten, die von lauter Ebenen begrenzt sind, auf denen also blos gerade Linien vorkommen. Ein solcher Körper ist vollkommen bestimmt, wenn man die Lagen aller seiner Eckpunkte kennt, und ausserdem weiss, welche Ecken auf dem Körper durch gerade Linien verbunden sind. Zur Bestimmung eines solchen Körpers nun hat man es am zweckmässigsten gefunden, folgendes Verfahren einzuschlagen.

Man nimmt zwei auf einander senkrechte fest verbundene Ebenen an, und bringt damit den zu bestimmenden Körper in feste Verbindung. Nun fällt man von einem beliebigen Eckpunkte a des Körpers Senkrechte auf die beiden Ebenen und zeichnet auf diesen die Punkte a_1, a_2 (sprich: a eins, a zwei), in denen sie von jenen Senkrechten getroffen werden. Durch diese beiden Punkte a_1, a_2 ist offenbar der Punkt a des Körpers vollkommen bestimmt, und er lässt sich auffinden, auch wenn der Körper wieder entfernt ist. Denn die Punkte a_1, a_2 bestimmen vollkommen die aus dem Punkte a zu den beiden Ebenen errichteten Senkrechten und mit ihnen auch den Punkt a, in welchem sich die Senkrechten schneiden müssen, da beide durch den Punkt a gelegt wurden, und wegen ihrer gegenseitigen senkrechten Stellung nicht zusammenfallen können.

Verfährt man daher für einen zweiten Eckpunkt b ebenso, wie für a, so dass man die Fusspunkte b_1, b_2 erhält, u. s. f. für alle Eckpunkte des Körpers, so sind alle diese Eckpunkte vollkmmen bestimmt und der Körper kann daher entfernt werden. Verbindet man noch in jeder der beiden Ebenen die in ihr gezeichneten Punkte in derselben Weise, wie sie am

Körper selbst verbunden sind, so erhält man zwei Zeichnungen (auf jeder der beiden Ebenen eine) die zusammen den Körper vollkommen bestimmen. Denn man kann nach Entfernung des Körpers dessen Eckpunkte und deren Verbindungslinien, also auch die ganze Gestalt des Körpers, wieder auffinden.

3. Wir werden daher zur Bestimmung von Gestalten zwei aufeinander senkrechte zu einem Systeme verbundene Ebenen anwenden, von denen wir eine die erste Tafel oder Tafel eins (abgekürzt: $\mathfrak{T}_1$), die andere zweite Tafel oder Tafel zwei ($\mathfrak{T}_2$) und deren Durchschnitt wir Kante ($\mathfrak{K}$) nennen. Um mit Hülfe dieser Tafeln (abgekürzt: $\mathfrak{T}$) einen Punkt a im Raume zu bestimmen, denken wir uns von ihm aus eine Senkrechte zur $\mathfrak{T}_1$ und eine zur $\mathfrak{T}_2$ gefällt, und zeichnen die Punkte a_1, a_2, in denen die $\mathfrak{T}$ von diesen Senkrechten getroffen werden. Diese Punkte a_1, a_2, nennen wir die Risse (Projektionen) des Punktes a, und zwar den in der $\mathfrak{T}_1$ liegenden Punkt a_1 seinen ersten Riss ($\mathfrak{R}_1$), den in der $\mathfrak{T}_2$ liegenden Punkt a_2 seinen zweiten Riss ($\mathfrak{R}_2$); die auf die $\mathfrak{T}_1$ gefällte Senkrechte das erste Loth ($\mathfrak{L}_1$), die auf die $\mathfrak{T}_2$ gefällte Senkrechte das zweite Loth ($\mathfrak{L}_2$) des Punktes a. Fig. 1. *)

Hat man daher die Risse a_1, a_2 eines Punktes a, so finden wir diesen, indem wir in a_1 eine Senkrechte zur $\mathfrak{T}_1$ errichten, welche das $\mathfrak{L}_1$ des Punktes a ist; ferner in a_2 eine Senkrechte zur $\mathfrak{T}_2$, das $\mathfrak{L}_2$; der Durchschnitt von $\mathfrak{L}_1$ und $\mathfrak{L}_2$ ist der Punkt a.

Hat man blos einen Riss eines Punktes, so weiss man bloss, dass der Punkt in dem, durch diesen Riss bestimmten, Lothe liegen muss.

NB. $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$, und ähnliche Abkürzungen, die noch in der Folge festgesetzt werden, gebrauchen wir, wenn das für die Abkürzung zu setzende Wort in der Einheit oder in der Mehrheit steht; z. B. kann $\mathfrak{R}_1$ sowohl erster Riss, als auch erste Risse heissen. Aus dem Zusammenhange wird sich immer ergeben ob die Einheit oder die Mehrheit zu nehmen ist.

Anmerkung 1. Da es uns freisteht, welche von den beiden Tafeln wir als die erste ansehen, und nur verlangt wird, dass,

---

*) Auf die vor einer Nummer angegebene Figur beziehen sich alle in der ganzen Nummer aufgeführten Buchstaben, so weit nicht ausnahmsweise im Text auf eine andere Figur verwiesen ist.

wenn eine davon als erste bezeichnet ist, die andere als zweite angesehen werden muss, so bleibt jeder Satz wahr, wenn man in ihm durchweg eins und zwei mit einander vertauscht. Deshalb werden wir künftighin alle Entwicklungen blos für die $\mathfrak{T}_1$ machen, und es dem Schüler überlassen, durch Vertauschen von eins und zwei sich das Resultat derselben Entwicklung für die $\mathfrak{T}_2$ zu verschaffen.

Anmerkung 2. In anderen Lehrbüchern werden die beiden Tafeln auch Projektionsebenen, Grundebenen genannt, und durch die Bezeichnungen horizontal und vertikal von einander unterschieden. Den Schnitt der beiden Tafeln nennen andere auch Axe, Basis, Grundschnitt.

Fig. 1. 4. Man denke sich wieder einen ausser der Tafel liegenden Punkt a und seine beiden Lothe aa_1, aa_2. Da sich diese in a schneiden, so bestimmen sie eine Ebene, die wir die Lothebene des Punktes a nennen wollen. Weil nun diese Lothebene ein Loth zur $\mathfrak{T}_1$ und eines zur $\mathfrak{T}_2$ enthält, so steht sie senkrecht auf $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ (Anh. 16.) *), also auch (nach Anh. 20.) auf der $\mathfrak{K}$, und schneidet diese in einem Punkte $\mathfrak{a}$, den wir den Kantenriss ($\mathfrak{K}\mathfrak{R}$) des Punktes a nennen wollen. Weil aber die Lothebene senkrecht ist zur $\mathfrak{K}$, so sind es auch die in ihr liegenden Geraden $a_1\mathfrak{a}$ und $a_2\mathfrak{a}$; und da $a_1\mathfrak{a}$ senkrecht zu $\mathfrak{K}$ ist und in der zur $\mathfrak{T}_2$ senkrechten Ebene $\mathfrak{T}_1$ liegt, so ist auch $a_1\mathfrak{a} \perp \mathfrak{T}_2$, und daher auch (nach Anh. 22.) parallel zum Lothe aa_2. Ebenso ist $\mathfrak{a}a_2 \perp \mathfrak{T}_1$ und $\parallel aa_1$. Es bilden also die Geraden aa_1, aa_2, $\mathfrak{a}a_1$ und $\mathfrak{a}a_2$ ein Rechteck, und es ist daher $aa_1 = a_2\mathfrak{a}$ und $aa_2 = a_1\mathfrak{a}$. Ferner sieht man, dass die aus a_1 in der $\mathfrak{T}_1$ und aus a_2 in der $\mathfrak{T}_2$ zur $\mathfrak{K}$ gezogenen Senkrechten in einem Punkte der $\mathfrak{K}$, nemlich im $\mathfrak{K}\mathfrak{R}$ des Punktes a zusammen kommen.

Fig. 1. 5. Um die aus diesen Betrachtungen sich ergebenden Sätze leichter ausdrücken zu können, wollen wir vorerst noch einige darauf bezügliche Benennungen einführen. Wir wollen die in den $\mathfrak{T}$ aus den Rissen zur $\mathfrak{K}$ gezogenen Senkrechten $a_1\mathfrak{a}$ und $a_2\mathfrak{a}$ Kantenlothe ($\mathfrak{K}\mathfrak{L}$) nennen, und zwar die in der $\mathfrak{T}_1$ das erste Kantenloth ($\mathfrak{K}\mathfrak{L}_1$), die in der $\mathfrak{T}_2$ das zweite Kantenloth

---

*) Jede Nummer in ( ), vor welcher „Anh.“ steht, bezieht sich auf die entsprechenden Nummern des Anhanges zu diesem Buche.

($\mathfrak{K}\mathfrak{L}_2$) des Punktes a. Ferner nennen wir die Länge aa_1, welche den Abstand des Punktes a von der $\mathfrak{T}_1$ angibt, den ersten Abstand ($\mathfrak{A}_1$), die Länge aa_2 den zweiten Abstand ($\mathfrak{A}_2$); die Länge $a_1\mathfrak{a}$, welche den Abstand des $\mathfrak{R}_1$ des Punktes a von der $\mathfrak{K}$, oder, was dasselbe ist, von seinem $\mathfrak{K}\mathfrak{R}$ angibt, die erste Ordinate ($\mathfrak{O}_1$), die Länge $a_2\mathfrak{a}$, d. i. die Entfernung des $\mathfrak{R}_2$ von der $\mathfrak{K}$, die zweite Ordinate ($\mathfrak{O}_2$). Es lauten demnach die aus Num. 4 hervorgehenden Sätze folgendermassen:

1) Wenn ein Punkt ausser den Tafeln liegt, so bilden seine Lothe und Kantenlothe ein Rechteck;
2) seine Kantenlothe schneiden sich in einem Punkte der $\mathfrak{K}$, und zwar in seinem $\mathfrak{K}\mathfrak{R}$;
3) es ist sein $\mathfrak{A}_1$ gleich seiner $\mathfrak{O}_2$ (s. 3. Anm. 1.)

6. Wir denken uns jeden zu bestimmenden Punkt im Raume mit einem Buchstaben aus dem kleinen lateinischen Alphabete bezeichnet und schreiben an seinen $\mathfrak{R}_1$ denselben Buchstaben, aus demselben Alphabete, versehen (rechts unten) mit der Ziffer 1; an seinen $\mathfrak{R}_2$ denselben Buchstaben mit der Ziffer 2; an seinen $\mathfrak{K}\mathfrak{R}$ denselben Buchstaben, aber aus dem deutschen Alphabete. Ist z. B. ein Punkt, den wir durch seine Risse bestimmen, mit a bezeichnet gedacht, so bezeichnen wir seinen $\mathfrak{R}_1$ mit a_1, seinen $\mathfrak{R}_2$ mit a_2 und seinen $\mathfrak{K}\mathfrak{R}$ mit $\mathfrak{a}$.

Wir verstehen daher unter Punkt a oder, abgekürzt, $\mathfrak{P}$ (a) den Punkt, dessen Risse mit a_1, a_2 bezeichnet sind, und dessen $\mathfrak{K}\mathfrak{R}$, wenn man ihn bezeichnet, mit dem Buchstaben $\mathfrak{a}$ versehen wird. Der $\mathfrak{P}$ (a) selbst liegt also im Allgemeinen gar nicht in einer Tafel und ist demnach auch nicht gezeichnet; in den Tafeln sind blos seine Risse a_1, a_2 zu finden, und diese müssen so liegen, dass das $\mathfrak{K}\mathfrak{L}_1$ und das $\mathfrak{K}\mathfrak{L}_2$ des $\mathfrak{P}$ (a) in einem Punkte der $\mathfrak{K}$ zusammenkommen (s. 5. Satz 2).

7. Da wir auf den Ebenen, die wir Tafeln genannt haben, zeichnen wollen, so muss sich hinter einer solchen Tafel ein materieller Körper befinden. Es ist daher jede Tafel eine ebene Fläche eines materiellen Körpers (eines aufgespannten Papierbogens, eines ebenen Brettes etc. etc.), den wir Zeichnungsblatt, Reissblatt oder Blatt nennen. Denkt man sich diese Ebene nach allen Seiten verlängert, so theilt sie den Raum in

zwei Theile, in deren einem die von der Tafel begrenzte Materie des Zeichnungsblattes liegt, während im anderen das Auge des Zeichners sich befindet. Den letzteren Raum nennen wir den positiven (+), den ersteren, (in welchem die Materie des von der Tafel begrenzten Zeichnungsblattes liegt) den negativen (—) Raum der Tafel, und sagen wir von einem Punkte ausser der Tafel sein Abstand ist + oder —, je nachdem der Punkt in dem + oder — Raum dieser Tafel liegt.

Ebenso wird jede der beiden Tafeln durch die $\mathfrak{R}$ in zwei Theile getheilt, von denen der eine die positive, der andere die negative Tafel genannt wird, und zwar setzen wir fest, dass die positive erste Tafel ($+\mathfrak{T}_1$) der Theil der $\mathfrak{T}_1$ ist, welcher in dem + Raum der $\mathfrak{T}_2$, und die $+\mathfrak{T}_2$ der Theil der $\mathfrak{T}_2$, der im + Raum der $\mathfrak{T}_1$ liegt. Man nennt wieder die Entfernung eines in einer Tafel liegenden Risses von der $\mathfrak{R}$, d. h. seine Ordinate (s. 5) positiv (+) oder negativ (—), je nachdem er in der + oder — Tafel liegt. Wenn daher z. B. der $\mathfrak{R}_1$ eines Punktes in der $+\mathfrak{T}_1$ liegt, so ist seine $\mathfrak{D}_1$ positiv.

Wir sagen von zwei Dingen sie haben gleiche Vorzeichen, wenn beide + oder beide — sind; ungleiche, wenn eines + und das andere — ist.

Fig. 1.

8. Denkt man sich die beiden Tafeln ins Unbegrenzte verlängert, so theilen sie den Raum in 4 Theile. Liegt ein Punkt a, der in keiner Tafel sich befindet, in einem dieser 4 Theile, so bilden (5. Satz 1.) sein $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$, $\mathfrak{R}\mathfrak{L}_1$ und $\mathfrak{R}\mathfrak{L}_2$ ein Rechteck, und da $aa_2 \parallel \mathfrak{T}_1$ ist (Anh. 30), so liegen a und a_2 entweder beide im + oder beide im — Raum der $\mathfrak{T}_1$; im ersten Falle ist der $\mathfrak{A}_1$ des $\mathfrak{P}(a)$ + und sein $\mathfrak{R}_2$ liegt in der $+\mathfrak{T}_2$, also ist auch seine $\mathfrak{D}_2$ positiv; im zweiten Falle ist der $\mathfrak{A}_1$ und die $\mathfrak{D}_2$ negativ. Es gehen hieraus und aus den Num. 5 und 7 folgende Sätze für einen ausser den Tafeln liegenden Punkt hervor:

1) Die $\mathfrak{D}_1$ eines ausser den Tafeln liegenden Punktes ist + oder — je nachdem sein $\mathfrak{R}_1$ in der $+\mathfrak{T}_1$ oder in der $-\mathfrak{T}_1$ liegt;
2) der $\mathfrak{A}_1$ eines solchen Punktes ist der Länge und dem Vorzeichen nach gleich seiner $\mathfrak{D}_2$.

9. Liegt ein Punkt in der $\mathfrak{T}_1$, so wird diese von seinem $\mathfrak{L}_1$ in dem Punkte selbst getroffen, so dass also ein solcher Punkt

mit seinem $\mathfrak{R}_1$ zusammenfällt; demnach fallen auch das $\mathfrak{L}_2$ und und das $\mathfrak{K}\mathfrak{L}_1$ dieses Punktes zusammen, und daher auch sein $\mathfrak{R}_2$ mit seinem $\mathfrak{K}\mathfrak{R}$. Es ist daher für einen solchen Punkt der $\mathfrak{A}_1$ und die $\mathfrak{D}_2 = 0$ und der $\mathfrak{A}_2$ und die $\mathfrak{D}_1$ der Länge und dem Vorzeichen nach gleich. Ebenso fällt ein Punkt der $\mathfrak{T}_2$ mit seinem $\mathfrak{R}_2$ und sein $\mathfrak{K}\mathfrak{R}$ mit seinem $\mathfrak{R}_1$ zusammen. Endlich fällt ein Punkt der $\mathfrak{K}$, d. i. ein Punkt, der in beiden Tafeln zugleich liegt, mit seinem $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$ und $\mathfrak{K}\mathfrak{R}$ zusammen. Es geht daraus, aus dem zweiten Satze der Num. 8 und aus dem zweiten Satze der Num. 5 hervor, dass

1) das $\mathfrak{K}\mathfrak{L}_1$ und $\mathfrak{K}\mathfrak{L}_2$ eines jeden Punktes (auch wenn er in einer Tafel oder in der Kante liegt) sich in seinem $\mathfrak{K}\mathfrak{R}$ schneiden;
2) der $\mathfrak{A}_1$ eines jeden Punktes der Länge und dem Vorzeichen gleich seiner $\mathfrak{D}_2$ ist;
3) jeder Punkt in der $\mathfrak{T}_1$ mit seinem $\mathfrak{R}_1$, sein $\mathfrak{K}\mathfrak{R}$ mit seinem $\mathfrak{R}_2$ und
4) jeder Punkt der $\mathfrak{K}$ mit seinem $\mathfrak{K}\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ zusammenfällt.

10. Aus den vorhergehenden Sätzen geht hervor, dass man die Risse eines gegebenen Punktes und den Punkt, dessen Risse gegeben sind, auch in anderer Art, als anfangs (3.) angegeben worden, finden kann. Hat man nemlich den zu bestimmenden Körper mit dem rechtwinkeligen Tafelsystem fest verbunden, so fällt man von einem Eckpunkte a des Körpers sein $\mathfrak{L}_1$ und findet daraus seinen $\mathfrak{R}_1$. Anstatt nun durch das $\mathfrak{L}_2$ des Punktes den $\mathfrak{R}_2$ zu finden, kann man folgendermassen verfahren: Man zieht aus a_1 die zur $\mathfrak{K}$ Senkrechte a_1a, wodurch man den $\mathfrak{K}\mathfrak{R}(a)$ erhält; legt man nun durch a in der $\mathfrak{T}_2$ eine Senkrechte zur $\mathfrak{K}$, so ist diese das $\mathfrak{K}\mathfrak{L}_2$; trägt man endlich auf dieses von a aus den $\mathfrak{A}_1$ dieses Punktes auf (und zwar in der + oder — $\mathfrak{T}_2$, je nachdem der $\mathfrak{P}$ (a) in dem + oder — Raum der $\mathfrak{T}_1$ liegt), so erhält man den gesuchten $\mathfrak{R}_2$ des $\mathfrak{P}$ (a). In ähnlicher Art kann man auch mit Hülfe des $\mathfrak{R}_2$ und des $\mathfrak{A}_2$ den $\mathfrak{R}_1$ finden. Ebenso verfährt man für die übrigen Eckpunkte des Körpers. Sind umgekehrt a_1, a_2 die Risse eines Punktes a, so kann dieser auch so erhalten werden, dass man entweder das $\mathfrak{L}_1$ errichtet und darauf von a_1 aus eine Länge gleich der $\mathfrak{D}_2$ aufträgt (und zwar Fig. 1.

in dem + oder — Raum der $\mathfrak{T}_1$, je nachdem a_2 in der + oder — $\mathfrak{T}_2$ liegt); oder dass man das $\mathfrak{L}_2$ errichtet und darauf von a_2 aus eine Länge gleich der $\mathfrak{D}_1$ aufträgt, und zwar in dem + oder — Raum der $\mathfrak{T}_2$, je nachdem a_1 in der + oder — $\mathfrak{T}_1$ liegt. Man braucht also wie man sieht, sowohl wenn man die Risse eines gegebenen Punktes, als auch, wenn man mit Hilfe der Risse den durch sie bestimmten Punkt suchen will, nur zu einer Tafel ein Loth zu errichten. Diese Tafel, zu der wir das Loth errichten, wollen wir die Haupttafel, die andere die Nebentafel nennen.

Anm. Der Nutzen dieses neuen Verfahrens liegt einfach darin, dass man dadurch zur Bestimmung eines Punktes nur ein Loth braucht. Dies ist deshalb von Vortheil, weil wir die Lothe nicht zeichnen können, da sie ausserhalb unserer Tafeln liegen. Will man aus einem Punkte im Raume auf eine Tafel eine Senkrechte errichten, so braucht man dazu eines besonderen Apparates oder, wenn die Tafel horizontal gelegt wird, eines Senkels. Bedient man sich des Senkels, und stellt zu dem Ende die $\mathfrak{T}_1$ horizontal und daher die $\mathfrak{T}_2$ vertikal, so kann man von jedem Punkte blos das $\mathfrak{L}_1$, aber nicht das $\mathfrak{L}_2$ errichten, es ist also vortheilhaft, die $\mathfrak{R}$ eines Punktes mit einem einzigen Lothe auffinden zu können.

10 a. Will man mittelst eines Tafelsystems die gegenseitige Lage von beliebigen Punkten, ohne dass man die Risse derselben zeichnet, so bestimmen, dass Jeder darnach im Stande ist, die Lagen ihrer Risse anzugeben, so nimmt man in der Kante einen beliebigen Punkt (Ursprung) an, und bestimmt für jeden Punkt, ausser seinen Ordinaten ($\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{D}_2$), noch die Entfernung seines Kantenrisses vom Ursprung. Diese Länge nennt man die Abscisse ($\mathfrak{Abg} : \mathfrak{Ab}$) des Punktes und bezeichnet sie als positiv (+) oder negativ (—), je nachdem sie von einem bestimmten Standpunkte aus, den wir für alle Punkte einhalten, rechts oder links vom Ursprung aufzutragen ist. In diesem Falle wird dann jeder Punkt durch drei Längen ($\mathfrak{Ab}_1$ $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$) bestimmt, die man dann auch seine Coordinaten nennt, und zwar die $\mathfrak{Ab}$ seine x Coordinate, oder sein x, die $\mathfrak{D}_1$ sein y, die $\mathfrak{D}_2$ sein z. Um kurz und doch klar sein zu können, setzt man dann fest, dass die 3 Coordinaten in Zahlen

nach einem bestimmten Massstabe, z. B. in Millimetern, gegeben werden, und dass immer von den drei zur Bestimmung der Coordinaten eines Punktes gegebenen Zahlen (von denen jede, wie üblich, als positiv gilt, wenn entweder kein Zeichen oder + vorgesetzt ist, als negativ aber nur dann, wenn das Zeichen — voransteht) die erste die $\mathfrak{Ab}$ oder das x, die zweite die $\mathfrak{D}_1$ oder das y, die dritte die $\mathfrak{D}_2$ oder das z vorstellen. Spricht man also von dem Punkt (24, 18, 36), so ist sein $x = 24$, sein $y = 18$ und sein $z = 36$.

Bemerkung. Diese Art, die Punkte durch ihre drei Coordinaten zu geben, ist besonders zweckmässig für den Lehrer der darstellenden Geometrie, wenn er seinen Schülern eine gemeinschaftliche Aufgabe zur Ausarbeitung (z. B. bei Prüfungen) vorlegt. Ueberlässt er dabei den Schülern die Annahme der gegebenen Punkte, so fällt natürlich die Zeichnung für die einzelnen Schüler verschieden aus, bei manchen so, dass die Aufgabe unmöglich oder schwer ausführbar ist. Gibt er aber alle Punkte durch ihre Coordinaten, und zwar natürlich so, dass dieselben eine wünschenswerthe gegenseitige Lage erhalten, so gestaltet sich die Zeichnung für alle Schüler gleich.

11. Die Betrachtungen der Nr. 10 geben uns Mittel an die Hand, um ein Hinderniss zu beseitigen, das sich der graphischen Bestimmung von Gestalten, in der bis jetzt angegebenen Weise, entgegengesetzt hätte. Es wäre nemlich höchst unbequem auf zwei zu einander wirklich senkrechten Tafeln zu zeichnen, indem die Materie des einen Blattes bei der Ausführung der Zeichnungen auf dem andern hindernd im Wege steht. Dieses Hinderniss können und werden wir nun dadurch beseitigen, dass wir uns die Tafeln zwar senkrecht zu einander denken, aber nicht senkrecht zu einander stellen. Denkt man sich nemlich die beiden Tafeln nebst den zu bestimmenden Punkten, ihren Rissen, Lothen und Kantenlothen, und stellt sich vor, dass die $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{KL}_1$ und $\mathfrak{R}_1$ fest mit der $\mathfrak{T}_1$, die $\mathfrak{L}_2$, $\mathfrak{KL}_2$ und $\mathfrak{R}_2$ fest mit der $\mathfrak{T}_2$ verbunden sind, so werden, wenn man die $\mathfrak{T}$ von einander entfernt und beliebig wohin legt, (man nennt dieses Auseinanderlegen der Tafeln „Umklappen“) das $\mathfrak{L}_1$ und $\mathfrak{L}_2$ eines beliebigen Punktes, z. B. des $\mathfrak{P}$ (a), nicht mehr diesen Punkt gemein haben, sondern es wird dieser zweimal erscheinen, einmal in

seinem $\mathfrak{L}_1$ und einmal in seinem $\mathfrak{L}_2$. Nennen wir den in $\mathfrak{L}_1$ liegenden $\mathfrak{P}$ (a) den ersten Punkt a, den in $\mathfrak{L}_2$ den zweiten Punkt a, so werden alle ersten Punkte durch das Umklappen der $\mathfrak{T}_1$ ihre Lage gegen die $\mathfrak{T}_2$, nicht aber gegen die $\mathfrak{T}_1$ verändern, und es wird ihre gegenseitige Lage, also auch die Gestalt, die sie bestimmen, unverändert bleiben. Ebenso wird die gegenseitige Lage sowohl der in der $\mathfrak{T}_1$, als der in der $\mathfrak{T}_2$ liegenden Punkte und Linien durch das Umklappen sich nicht ändern; dagegen werden die in der $\mathfrak{T}_1$ liegenden Punkte gegen die in der $\mathfrak{T}_2$ nach dem Umklappen eine andere Lage einnehmen, als vorher. Bestimmt man nun in den umgeklappten Tafeln wie sie zusammengestellt gedacht sind, so werden wir uns überzeugen, dass man, welche Tafel auch als Haupttafel angenommen wird, mit Hilfe der obigen (10.) Betrachtungen, sowohl die Risse eines Punktes, wenn dessen Lage gegen die Haupttafel bekannt ist, als auch aus den Rissen eines Punktes seine Lage gegen die Haupttafel finden kann, ohne die Tafeln aufzuklappen, d. h. ohne sie in die Lage wirklich zu versetzen, die von ihnen vorausgesetzt wird. Nur wenn man nachsehen will, ob richtig angegeben ist, wie die Tafeln gegen einander stehen, muss man sie, wie sich zeigen wird, in gewisser Weise gegen einander bewegt denken.

Fig. 2. 12. Wir werden in unseren Blättern die $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ stets so umklappen, dass beide in dieselbe Ebene, nemlich in die unseres Zeichnungsblattes fallen. In diesem Falle ist es am einfachsten, die Umklappung noch dazu so vorzunehmen, dass die beiden Tafeln die $\mathfrak{K}$ gemeinschaftlich behalten. Dann werden die Punkte der $\mathfrak{K}$ in den umgeklappten Tafeln gegen die Punkte in der $\mathfrak{T}_1$ und der $\mathfrak{T}_2$ dieselbe Lage haben, wie in den aufgeklappten Tafeln. Sind nun beide Tafeln in unser Zeichnungsblatt, in dem die Fig. 2 liegt, so umgeklappt worden, dass $\mathfrak{K}$ die gemeinschaftliche Kante ist und liegt $+\ \mathfrak{T}_1$, wie es in unserer Figur angegeben ist, vor $\mathfrak{K}$, so muss $+\ \mathfrak{T}_2$ hinter $\mathfrak{K}$ liegen; denn da (nach 7.) der Raum ober dem Zeichnungsblatte*) der $+$ Raum

*) Obgleich es ohnehin stattfinden wird, so wollen wir doch, um allenfallsigen Irrungen zu begegnen, hier ein für allemal erklären, dass, wenn wir auf unsere Figuren verweisen, immer vorausgesetzt

der $\mathfrak{T}_1$ und der $\mathfrak{T}_2$ ist, so muss, wenn man sich die $\mathfrak{T}$ so aufgeklappt denkt, dass man die $\mathfrak{T}_2$ liegen lässt und die $\mathfrak{T}_1$ um $\mathfrak{K}$ dreht, bis sie senkrecht zur $\mathfrak{T}_2$ steht, die $+\ \mathfrak{T}_1$ oberhalb unseres Zeichnungsblattes (s. 7.) erscheinen, und wird ihr $+$ Raum, also auch die $+\ \mathfrak{T}_2$ hinter der $\mathfrak{T}_1$ oder hinter der $\mathfrak{K}$ liegen, wie dies unserer Annahme zufolge der Fall ist

Hieraus geht zunächst der Satz hervor:

> Wenn man die beiden Tafeln eines Systems so in eine Ebene umklappt, dass sie die Kante gemeinschaftlich behalten (und selbstverständlich die Zeichnungen darauf einander nicht zu decken), so erscheinen die $+\ \mathfrak{T}_1$ und die $+\ \mathfrak{T}_2$ auf entgegengesetzten Seiten der Kante.

Haben wir in der angegebenen Art umgeklappt, so erscheinen die beiden Kantenlothe eines Punktes, z. B. des $\mathfrak{P}$ (a), da beide durch denselben Punkt in der Kante gehen und auf dieser senkrecht stehen, als eine einzige zur $\mathfrak{K}$ senkrechte Gerade, und ist demnach die Verbindungslinie der beiden Risse a_1, a_2 nach der Umklappung eine zur $\mathfrak{K}$ senkrechte Gerade. Wir haben daher den Satz:

> Wenn man die beiden Tafeln so in eine Ebene umklappt, dass sie die $\mathfrak{K}$ gemeinsam behalten, so steht die Verbindungslinie der beiden Risse eines Punktes senkrecht zur Kante. Wir sagen dann, die Risse eines Punktes liegen senkrecht übereinander.

Anmerkung. Bei der eben angeführten Art der Umklappung zeichnen wir stets die $\mathfrak{K}$ so, dass sie mit dem vorderen (oder hinteren) Rand des Zeichnungsblattes parallel ist, und dass $+\ \mathfrak{T}_1$ vor der $\mathfrak{K}$ und daher $+\ \mathfrak{T}_2$ hinter der $\mathfrak{K}$ liegt.

---

wird, der Schüler habe das Zeichnungsblatt vor sich liegen und zwar so, dass selbstverständlich die Zeichnung nach oben gerichtet ist, damit man sie sieht, und die darin befindlichen Buchstaben aufrecht stehen, wodurch sich das rechts, oben und unten klar herausstellt.

Fig. 3. 13. So einfach und leichtverständlich auch die eben beschriebene Umklappungsart ist, so werden wir sie doch selten anwenden; denn sie hat den Nachtheil, dass in den Fällen, wo die Ordinaten der gegebenen Punkte theils positiv, theils negativ sind, die beiden Risse des von den Punkten bestimmten Gebildes einander theilweise decken. In der That liegnn ja vor der $\mathfrak{K}$ sowohl die $\mathfrak{R}_1$ von Punkten mit positiven $\mathfrak{D}_1$, als auch die $\mathfrak{R}_2$ von Punkten mit negativen $\mathfrak{D}_2$, und werden sich daher z. B in der Fig. 2, wenn man a_1 und b_1 sowie a_2 und b_2 mit einander verbindet, diese Verbindungslinien gegenseitig durchschneiden. Solches Ineinandergreifen der beiden Risse eines Gebildes führt aber leicht zu Unklarheiten der Zeichnung und muss gewöhnlich vermieden werden. Demgemäss werden wir in der Regel folgende Umklappungsart anwenden. Wir denken uns zunächst die Tafeln so umgeklappt, wie in voriger Nummer, und schieben dann (wie in Fig. 3) die beiden Tafeln (ohne sie von der Ebene des Zeichnungsblattes abzuheben) so auseinander, dass die $\mathfrak{K}$ zweimal erscheint (einmal als $\mathfrak{K}_1$ durch Verschiebung der $\mathfrak{T}_1$ und als $\mathfrak{K}_2$ durch Verschiebung der $\mathfrak{T}_2$), und dass jeder Punkt der $\mathfrak{K}$ bei dieser Vorschiebung eine zur $\mathfrak{K}$ senkrechte Gerade beschreibt. Dann erscheint auch jeder $\mathfrak{K}\mathfrak{R}$ doppelt, einmal in der $\mathfrak{K}_1$, wo wir ihn $\mathfrak{K}\mathfrak{R}_1$ nennen und dem Buchstaben zu seiner Bezeichnung eine 1 anhängen, und einmal in der $\mathfrak{K}_2$ als $\mathfrak{K}\mathfrak{R}_2$. Die Verbindungslinie zweier solchen $\mathfrak{K}\mathfrak{R}$ eines Punktes z. B. $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}_2$ steht auf $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ senkrecht, und die beiden Kantenlothe eines Punktes fallen daher immer noch in eine Gerade. Ebenso ist immer noch die $+\ \mathfrak{T}_1$ vor der $\mathfrak{K}_1$ und die $+\ \mathfrak{T}_2$ hinter der $\mathfrak{K}_2$; es ist Alles so, wie in voriger Nummer, nur dass wir zwei Kanten haben statt einer, und dass dadurch die beiden Risse des gegebenen Gebildes nicht mehr in einander greifen, sobald man nur, wie in unserer Figur, die Tafeln weit genug auseinander schiebt, (was ja immer geschehen kann).

Auf eine kleine Veränderung müssen wir aber noch aufmerksam machen, die das Erscheinen zweier $\mathfrak{K}$, statt einer, mit sich bringt. Unter $\mathfrak{D}_1$ eines Punktes ist in diesem Falle zu verstehen: Die Entfernung der $\mathfrak{R}_1$ vom Kantenriss eins (während es früher bei nur einer $\mathfrak{K}$ geheissen hat vom Kantenriss), und ebenso haben wir von nun an immer statt der $\mathfrak{K}$ die-

jenige der beiden Kanten ($\mathfrak{K}_1$ oder $\mathfrak{K}_2$) zu nennen, die entsprechend ist; wenn z. B. früher gesagt wurde: „ein Punkt in der $\mathfrak{T}_1$ hat seinen $\mathfrak{R}_2$ in der $\mathfrak{K}$“, so muss es jetzt dafür heissen „in der $\mathfrak{K}_2$“.

14. Obgleich wir in unseren Blättern die $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ immer so umklappen, wie in den Num. 12. und 13. angegeben ist, so muss sich der Schüler dennoch mit der allgemeinsten Art der Umklappung der Tafeln bekannt und vertraut machen, theils weil wir später selbst bei anderer Gelegenheit davon Gebrauch machen, theils weil man in der Anwendung der darstellenden Geometrie (auf Maschinen- und Bauzeichnen, Darstellung von Werkzeugen, Fabrikaten) mitunter in anderer Art, als in Num. 12. und 13, ja sogar oft so umklappt, dass die $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ verschiedenen Blättern angehören, wie dies z. B. der Fall ist, wenn von zwei auf zwei verschiedenen Papierbögen ausgeführten Zeichnungen die eine den $\mathfrak{R}_1$ und die andere den $\mathfrak{R}_2$ desselben Körpers vorstellen. Solche von der vorigen Nr. abweichende Umklappungen stellen sich als nothwendig heraus, wenn der Raum des Blattes die einfache Umklappungsart nicht zulässt. Fig. 4.

Wir wollen daher die allgemeinste Art des Umklappens der beiden Tafeln besprechen, und angeben, wie man überhaupt von nun an, wo die Tafeln stets umgeklappt werden, zu verfahren hat, um einen Körper graphisch zu bestimmen.

Man nimmt eine der beiden Tafeln an, z. B. die $\mathfrak{T}_1$, und bringt damit den zu bestimmenden Körper in feste Verbindung. Nun fällt man von allen Ecken des Körpers Lothe zu der Tafel, zeichnet deren Fusspunkte d. h. die ersten Risse a_1, b_1, c_1 etc. und misst die $\mathfrak{A}_1$ der Punkte (entweder mit einem Zirkel um die wirkliche Länge derselben sich aufzuzeichnen, oder mit einem Massstabe um die Längen in Zahlen auszudrücken) unter Berücksichtigung des Vorzeichens (das übrigens gewöhnlich für alle diese $\mathfrak{A}_1$ positiv oder $= 0$ sein wird, da man den Körper so aufstellen wird, dass seine Ecken theils in der $\mathfrak{T}_1$ theils in dem $+$ Raume dieser Tafel liegen). Sobald dies geschehen, kann der Körper entfernt werden, denn seine Gestalt ist durch die gefundenen Dinge vollkommen bestimmt, sobald man noch durch die richtige Verbindung der gezeichneten $\mathfrak{R}_1$ bestimmt hat, in welcher Ordnung die Ecken des Körpers verbunden sind.

Nun hat man noch die $\mathfrak{R}_2$ der Punkte zu finden, und demnach eine $\mathfrak{T}_2$ anzunehmen, die man in irgend einer Linie zur $\mathfrak{T}_1$ senkrecht stehend voraussetzt aber nicht wirklich so stellt, sondern irgendwie umklappt, so dass die $\mathfrak{K}$ zweimal erscheint (als $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$). Denken wir uns dabei vor dem Umklappen der Tafeln einen Punkt auf der $\mathfrak{K}$ angenommen, den wir als Ursprung ($\mathfrak{U}$) betrachten (s. 10 a.) und der die $\mathfrak{K}$ in eine $+\mathfrak{K}$ und $-\mathfrak{K}$ theilt, so sieht man, dass durch die Umklappung der Tafeln jede Abscisse doppelt erscheint, als Abscisse eins ($\mathfrak{Ab}_1$) auf der $\mathfrak{K}_1$ und als $\mathfrak{Ab}_2$ auf der $\mathfrak{K}_2$, und dass offenbar diese beiden Abscissen gleiche Länge haben, da sie vor dem Umklappen sich decken. Nennen wir noch die durch Umklappen doppelt erscheinenden $+\mathfrak{K}$ in der einen Lage $+\mathfrak{K}_1$ in der anderen $+\mathfrak{K}_2$ (ebenso $-\mathfrak{K}_1$, $-\mathfrak{K}_2$), so sieht man, dass die beiden Umklappungen der $\mathfrak{Ab}$ eines Punktes gleiche Vorzeichen haben, und es gilt daher für die allgemeine Umklappung der Satz:

die $\mathfrak{Ab}_1$ eines Punktes ist der Länge und dem Vorzeichen nach gleich der $\mathfrak{Ab}_2$.

Dieser Satz in Verbindung mit einem früher angeführten, wornach

die $\mathfrak{D}_1$ eines Punktes (d. h. die Entfernung seines $\mathfrak{K}\mathfrak{R}_1$ von seinem $\mathfrak{R}_1$) der Länge und dem Vorzeichen nach gleich seinem $\mathfrak{Ab}_1$ ist,

wird uns dazu dienen, die zweiten Risse unserer Punkte zu finden, nachdem wir deren $\mathfrak{R}_1$ gezeichnet, und deren $\mathfrak{A}_1$ gemessen haben. Es ist aber noch auf einen wichtigen Umstand aufmerksam zu machen, den wir mit Hilfe unserer Figur (Fig. 4) klar hervorheben wollen. Hat man nemlich die ersten Risse (a_1, b_1, c_1) der gegebenen Punkte gezeichnet und deren $\mathfrak{A}_1$ gemessen, so nimmt man, wie oben angegeben, die $\mathfrak{T}_2$ (in unserer Figur liegt die $\mathfrak{T}_2$ in einer Ebene mit der $\mathfrak{T}_1$), die $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ an, und betrachtet irgend einen Punkt der $\mathfrak{K}_1$ (hier a_1) als $\mathfrak{U}_1$, irgend einen Punkt der $\mathfrak{K}_2$ (hier a_2) als $\mathfrak{U}_2$. Nun hat man noch zu bestimmen, auf welcher Seite von a_1 und a_2 die $+\mathfrak{K}_1$ und bezw. die $+\mathfrak{K}_2$, und auf welcher Seite von $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ die $+\mathfrak{T}_1$ und bezw. die $+\mathfrak{T}_2$ liegen. In Bezug auf diese Bestimmungen nun ist zu bemerken, dass von diesen vier Dingen ($+\mathfrak{K}_1$, $+\mathfrak{K}_2$, $+\mathfrak{T}_1$, $+\mathfrak{T}_2$) drei beliebig gewählt wer-

den können, während das Vierte daraus bestimmt ist. Denn denken wir uns die eine Tafel, z. B. die $\mathfrak{T}_2$ verschoben bis a_2 auf a_1, $+\ \mathfrak{K}_1$ auf $+\ \mathfrak{K}_2$, und die beiden Tafeln in einer Ebene liegen, so müssen (s. Nr. 12) die beiden positiven Tafeln auf entgegengesetzten Seiten der $\mathfrak{K}$ erscheinen; es geht also hieraus hervor, dass der Theil der $\mathfrak{T}_2$, welcher bei der eben genannten Verschiebung hinter die $\mathfrak{K}_1$ fällt, d. i. der Theil, in welchem a_2 liegt, die $+\ \mathfrak{T}_2$ ist. Es geht aber auch aus dieser Betrachtung hervor:

Liegen die beiden Tafeln in **einer** Ebene, und sind zugleich **beide** Kanten ($\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$) parallel zum vorderen Rande des Zeichnungsblattes, und liegt, wie das von nun an immer vorausgesetzt wird, $+\ \mathfrak{T}_1$ **vor** der $\mathfrak{K}_1$ und $+\ \mathfrak{T}_2$ **hinter** der $\mathfrak{K}_2$, so müssen die positiven Kanten (die $+\ \mathfrak{K}_1$ und die $+\ \mathfrak{K}_2$) entweder beide rechts oder beide links liegen. Dasselbe gilt, wenn die Tafeln in verschiedenen Ebenen liegen, in jeder die $\mathfrak{K}$ parallel zum vorderen Rande des entsprechenden Blattes ist, und $+\ \mathfrak{T}_1$ vor der $\mathfrak{K}_1$, $+\ \mathfrak{T}_2$ **hinter** der $\mathfrak{K}_2$ sich befindet.

Anm. Man wird nun sehen, wie sich bei der Aufsuchung der Risse von Punkten die in den Num. 12. und 13. angegebene Umklappungsart von der in vorliegender Nummer unterscheidet. Der Unterschied bestcht darin, dass man nach ersterer (12. und 13.) Art mit dem $\mathfrak{K}\mathfrak{L}_1$ eines Punktes auch sein $\mathfrak{K}\mathfrak{L}_2$ hat, weil bei dieser Umklappung die beiden Kantenlothe in eine Gerade fallen; nach letzterer Umklappungsart hingegen muss man die $+\ \mathfrak{K}_1$, $+\ \mathfrak{K}_2$, $+\ \mathfrak{T}_1$, $+\ \mathfrak{T}_2$ so, wie angegeben, wählen, damit die Umklappung richtig ausgeführt ist, und dann mit Hilfe der $\mathfrak{Ab}_1$ und $\mathfrak{Ab}_2$ aus dem $\mathfrak{K}\mathfrak{L}_1$ das $\mathfrak{K}\mathfrak{L}_2$ erst aufsuchen. Das Uebrige ist für beide Arten gleich.

Da wir nun in vorliegender Num. angegeben haben, wie man überhaupt aus dem $\mathfrak{K}\mathfrak{L}_1$ eines Punktess ein $\mathfrak{K}\mathfrak{L}_2$ findet, so werden wir der Einfachheit wegen in der Folge die $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ nach 12. oder 13. umklappen, und uns nicht dabei aufhalten, zu zeigen, wie man zu verfahren gehabt hätte, wenn anders umgeklappt worden wäre. Der Schüler jedoch wird gut thun, wenn er bei einigen folgenden Aufgaben zur Uebung versucht, sie für den Fall zu

lösen, dass die in der vorliegenden Num. angegebene allgemeine Umklappungsart angewendet wird.

15. Hat man die Tafeln in irgend einer der oben aufgeführten Arten umgeklappt, und will man die Lage eines Punktes a aus seinen Rissen finden, so hat man vor Allem zu sehen, ob die Punkte, die als Risse des zu suchenden Punktes angegeben sind, wirklich als solche auftreten können, d. h. ob sie (nach 12. und 13.) in einer zur $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ senkrechten Geraden liegen, oder, im Falle der allgemeinen Umklappung, ob $\mathfrak{Ab}_1 = \mathfrak{Ab}_2$ ist und die positiven Tafeln richtig angegeben sind. Ferner hat man zu bedenken, dass es (nach 11.) zwei $\mathfrak{P}$(a) gibt, einen ersten und einen zweiten; man wird daher fragen können, welcher von diesen Punkten gemeint sei? Allein wir haben oben (11.) gezeigt, dass die gegenseitige Lage aller ersten oder aller zweiten Punkte durch das Umklappen nicht verändert wird, und dass es daher gleichgültig ist, ob man den ersten oder zweiten Punkt a nimmt, d. h. ob man die $\mathfrak{T}_1$ oder $\mathfrak{T}_2$ als Haupttafel annimmt, wenn man für alle Punkte die nemliche Tafel als Haupttafel festsetzt. Nimmt man nun die $\mathfrak{T}_1$ als Haupttafel an, so wird (in den Figuren 2, 3 und 4) der $\mathfrak{P}$(a) in seinem $\mathfrak{L}_1$ liegen, und zwar, weil seine $\mathfrak{D}_2$ in der + $\mathfrak{T}_2$ liegt, also positiv ist, in dem + Raum der $\mathfrak{T}_1$, d. h. über dem Zeichnungsblatt, so weit als seine $\mathfrak{D}_2$ angibt. Der $\mathfrak{P}$(b), dessen $\mathfrak{D}_2$ negativ ist, wird in dem — Raum der $\mathfrak{T}_1$, also unter unserem Blatte so tief liegen, als seine $\mathfrak{D}_2$ angibt (s. 10.) Wählt man dagegen $\mathfrak{T}_2$ als Haupttafel, so liegt der $\mathfrak{P}$(a), da seine $\mathfrak{D}_1$ positiv ist, in dem + Raum der $\mathfrak{T}_2$, also über dem Zeichnuugsblatte, der $\mathfrak{P}$(b), dessen $\mathfrak{D}_1$ negativ ist, unter demselben, so weit davon entfernt, als seine $\mathfrak{D}_1$ angibt. Wenn wir daher von nun an von einem $\mathfrak{P}$(a) reden, also (nach 6.) von einem Punkte, dessen Risse mit a_1, a_2 bezeichnet sind, so setzen wir allemal voraus, dass

1) die Risse a_1, a_2 des Punktes die Bedingungen erfüllen, die sie zu erfüllen haben, also in unseren Zeichnungen (wo die Umklappung der $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ nach 12. oder 13. ausgeführt wird) in einer zur $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ senkrechten Geraden liegen, oder, wenn die Umklappung anders ausgeführt ist, dass $\mathfrak{Ab}_2$ der Länge und dem Vorzeichen nach gleich $\mathfrak{Ab}_1$ ist, und die positiven Tafeln richtig gewählt sind, dass ferner

2) für alle Punkte dieselbe Haupttafel angenommen wird.

16. Es sei irgend eine Gestalt durch die Risse so vieler Punkte a, b, c etc. derselben bestimmt, als zu ihrer Bestimmung nothwendig sind. Wenn man nun statt der gegebenen $\mathfrak{R}_1$ eine andere damit parallele Linie z. B. $\mathfrak{R}'_1$ als $\mathfrak{R}_1$ ansieht, ausserdem aber Alles unverändert lässt, so wollen wir sehen

1) ob die gegebenen Risse eines Punktes noch immer als solche betrachtet werden können, und wenn diess der Fall ist, ob

2) die nun durch sie bestimmten Punkte dieselbe gegenseitige Lage haben, wie die gegebenen Punkte.

ad 1) Da $\mathfrak{R}_1 \parallel \mathfrak{R}'_1$ ist, so sind die $\mathfrak{R}\mathfrak{L}_1$ für die $\mathfrak{R}'_1$ dieselben, wie für die $\mathfrak{R}_1$, und sind die Abscissen auf der neuen Kante ($\mathfrak{R}'_1$) ebenso gross als für die $\mathfrak{R}_1$, also gleich den $\mathfrak{Ab}_2$. Da ferner ausser der Verschiebung der $\mathfrak{R}_1$ nichts geändert worden ist, also auch die $+\ \mathfrak{R}'_1$ auf derselben Seite des Ursprungs liegt wie die $+\ \mathfrak{R}_1$, so sind auch die Vorzeichen für die neuen und alten $\mathfrak{Ab}_1$ gleich geblieben, und demnach erfüllen, nach der Veränderung der $\mathfrak{R}_1$, die $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ die regelrechten Bedingungen.

ad 2) Da die $\mathfrak{R}_1$ der Punkte liegen geblieben sind, und die $\mathfrak{D}_2$ sich nicht geändert haben, so kommen wir, wenn die $\mathfrak{T}_1$ als Haupttafel angesehen wird, auf dieselben Punkte, gleichviel, ob wir die Linie $\mathfrak{R}_1$ oder die $\mathfrak{R}'_1$ als $\mathfrak{R}_1$ ansehen.

Es haben also die durch die gezeichneten Risse bestimmten Punkte dieselbe gegenseitige Lage, und bestimmen also dieselbe Gestalt, gleichviel, ob wir die gegebene $\mathfrak{R}_1$ oder eine damit Parallele als solche ansehen. Ebenso lässt sich zeigen, dass statt der gegebenen $\mathfrak{R}_2$ jede mit ihr Parallele als $\mathfrak{R}_2$ angesehen werden kann, ohne dass die durch die gezeichneten Risse bestimmten Punkte eine andere gegenseitige Lage einnehmen.

Man kann daher die $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$, die man zum Entwurfe einer Zeichnung benützt hat, gewöhnlich (wo man die Kanten parallel zum vorderen Rande des Blattes macht) weglassen, da man weiss, dass sie parallel sind zu dem vorderen Rande des Blattes, in dem sie liegen. Man kann ferner, wenn die $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ in genannter Weise gegeben sind, jede von beiden irgendwohin parallel verschieben. Wenn man daher in irgend einer folgenden Figur

keine $\mathfrak{R}$ gezeichnet findet, so weiss man, dass sie parallel zum vorderen Rande des Blattes irgendwo angenommen werden können. Wir werden daher in den folgenden Figuren in der Regel die Kanten weglassen. Sobald wir aber eine Kante brauchen, z. B. die $\mathfrak{R}_1$, so nehmen wir sie (versteht sich parallel zum vorderen Rande des Blattes) so an, dass der $\mathfrak{R}_1$ eines Punktes in ihr liegt, meistens zugleich so, dass die $\mathfrak{D}_1$ der übrigen Punkte **positiv sind.**

17. Nachdem wir nun wissen, wie ein beliebiger Punkt durch Zeichnung bestimmt werden kann, gehen wir über zur Bestimmung von Geraden und Ebenen. Ehe wir aber darüber sprechen, wollen wir erst über die graphische Bestimmung von Raumgrössen überhaupt Folgendes bemerken. Um irgend eine Raumgrösse zu bestimmen, genügt es, so viele Punkte derselben (durch ihre Risse) zu bestimmen, als ihrer Natur nach zu ihrer Bestimmung nothwendig sind; allein für sehr viele Aufgaben begnügt man sich damit nicht, sondern denkt sich von allen Punkten der zu bestimmenden Raumgrösse Lothe zur $\mathfrak{T}_1$ gezogen, so dass man alle $\mathfrak{R}_1$ der einzelnen Punkte der Raumgrösse erhält. Den Inbegriff aller dieser $\mathfrak{R}_1$ nennt man den $\mathfrak{R}_1$ der Raumgrösse. Ein ähnliches hat man unter dem $\mathfrak{R}_2$ einer Raumgrösse zu verstehen. Es gehen daraus folgende Sätze hervor:

1) Die Risse von Punkten, die auf einer gegebenen Raumgrösse liegen, liegen in den entsprechenden Rissen dieser Raumgrösse.
2) Hat man die Risse von zwei Raumgrössen, so muss jeder Punkt, den sie gemeinschaftlich enthalten, seinen $\mathfrak{R}_1$ in den $\mathfrak{R}_1$, seinen $\mathfrak{R}_2$ in den $\mathfrak{R}_2$ beider Raumgrössen haben; daraus folgt:
3) Sollen zwei Raumgrössen einen Punkt gemein haben, so müssen sowohl die $\mathfrak{R}_1$ als die $\mathfrak{R}_2$ derselben einen Punkt gemein haben.
4) Ausserdem ist noch allgemein zu bemerken, dass man den Schnitt irgend eines geometrischen Gebildes mit einer Tafel seine Spur nennt, und zwar erste oder zweite Spur, je nachdem der Schnitt mit der $\mathfrak{T}_1$ oder $\mathfrak{T}_2$ bezeichnet werden soll.

18. Von jeder begrenzten Geraden, die wir zu bestimmen haben, geben wir die Risse ihrer Endpunkte an, und weil damit ihre Endpunkte bestimmt sind, so ist es auch die Gerade selbst. Allein wir begnügen uns nicht damit, sondern zeichnen auch die Risse der Geraden. Untersuchen wir daher, was die Risse einer Geraden sind.

Um den $\mathfrak{R}_1$ einer Geraden A, die wir als unbegrenzt voraussetzen, zu finden, müssen wir von allen Punkten derselben Lothe zur $\mathfrak{T}_1$ errichten und zusehen, wo sie diese treffen. Ist nun die Gerade senkrecht zur $\mathfrak{T}_1$, so fallen alle $\mathfrak{L}_1$ ihrer Punkte mit der Geraden selbst zusammen, und ist daher in diesem Falle der $\mathfrak{R}_1$ der Geraden der Punkt, in welchem sie die $\mathfrak{T}_1$ schneidet. Steht aber die Gerade schief gegen die $\mathfrak{T}_1$, so werden die $\mathfrak{L}_1$ ihrer Punkte Parallellinien sein und daher eine Ebene bilden (Anh. 6), die auf der $\mathfrak{T}_1$ senkrecht steht (Anh. 16.). Nennen wir diese Ebene die erste Lothebene oder die Lothebene eins ($\mathfrak{LE}_1$) der Geraden, so ist die Gerade, nach welcher diese $\mathfrak{LE}_1$ die $\mathfrak{T}_1$ schneidet, der $\mathfrak{R}_1$ der Geraden A. Es gehen daraus folgende Sätze hervor:

1) Wenn eine Gerade auf der $\mathfrak{T}_1$ senkrecht steht, so ist ihr $\mathfrak{R}_1$ ihre erste Spur, d. h. der Punkt, in welchem sie die $\mathfrak{T}_1$ schneidet;
2) in jedem andern Falle ist der $\mathfrak{R}_1$ einer Geraden wieder eine Gerade, und zwar **die erste Spur** der $\mathfrak{LE}_1$ der Geraden, d. h. der Ebene, welche durch die Gerade geht, und auf der $\mathfrak{T}_1$ senkrecht steht

Anm. Eine jede Gerade, die auf einer Tafel senkrecht steht, nennen wir ein Loth (abg. $\mathfrak{L}$) und zwar ein Loth eins ($\mathfrak{L}_1$) oder Loth zwei ($\mathfrak{L}_2$), je nachdem sie auf der $\mathfrak{T}_1$ oder $\mathfrak{T}_2$ senkrecht steht.

19. Ist der $\mathfrak{R}_1$ einer Geraden der Punkt a_1 (s. 18. Satz 1.), so ist die Gerade in a_1 auf der $\mathfrak{T}_1$ senkrecht; da es aber durch a_1 nur eine einzige Senkrechte zur $\mathfrak{T}_1$ gibt, so ist die Lage der Geraden durch ihren $\mathfrak{R}_1$ bestimmt. Ist die Gerade A_1 der $\mathfrak{R}_1$ einer Geraden A, d. h. (nach 18. Satz 2.) schneidet die $\mathfrak{LE}_1$ die $\mathfrak{T}_1$ nach A_1, so ist damit die $\mathfrak{LE}_1$ bestimmt; denn es gibt (Anh. 18.) durch A_1 nur eine einzige Ebene, die zur $\mathfrak{T}_1$ senkrecht

steht. Ist zugleich die Gerade A_2 der $\mathfrak{R}_2$ der Geraden A, so ist dadurch ihre $\mathfrak{LE}_2$ bestimmt. Hat man daher die Risse einer Geraden A, so sind dadurch im Allgemeinen zwei Ebenen bekannt, in denen A liegt, und es erscheint daher die zu bestimmende Gerade als Durchschnitt dieser Ebenen. Wir sagen im Allgemeinen, weil auch der Fall eintreten kann, dass die beiden Lothebenen zusammenfallen, und die beiden Risse der Geraden demnach nur diese einzige Ebene bestimmen. In diesem Falle, aber nur dann, muss offenbar diese gemeinschaftliche Lothebene auf der $\mathfrak{T}_1$ und der $\mathfrak{T}_2$, also auch auf der $\mathfrak{K}$ senkrecht stehen, und demnach die beiden Risse der Geraden, wie die beiden Kantenlothe eines Punktes, in einem einzigen Punkte auf der $\mathfrak{K}$ senkrecht stehen, so dass nach der gewöhnlichen Umklappungsart der Tafeln, die beiden Risse in eine zur $\mathfrak{K}$ senkrechte Gerade zusammenfallen. Wir haben demnach folgende Sätze:

1) Steht eine Gerade senkrecht auf der $\mathfrak{T}_1$, so ist ihr $\mathfrak{R}_1$ ein Punkt, und die Gerade ist durch ihren $\mathfrak{R}_1$ bestimmt.
2) Ist der $\mathfrak{R}_1$ einer Geraden A eine Gerade A_1, so ist sie dadurch nicht bestimmt, wohl aber ist ihre $\mathfrak{LE}_1$ bekannt; diese geht durch A_1 und steht auf der $\mathfrak{T}_1$ senkrecht.
3) Stehen beide Risse in dem nemlichen Punkte a der $\mathfrak{K}$ auf dieser senkrecht, so ist dadurch eine einzige (auf der $\mathfrak{K}$ senkrechte) Ebene bestimmt, in der die Gerade liegt, und die Gerade steht dann selbst senkrecht zur $\mathfrak{K}$. In diesem Falle ist die Gerade durch ihre Risse **nicht** bestimmt; und es **müssen** daher zwei Punkte derselben angegeben werden.
4) In allen andern Fällen sind die beiden Risse einer Geraden A gerade Linien, welche die Lage der Geraden vollkommen bestimmen. Es ist nemlich die Gerade der Durchschnitt, der durch den $\mathfrak{R}_1$ bestimmten $\mathfrak{LE}_1$ mit der durch den $\mathfrak{R}_2$ bestimmten $\mathfrak{LE}_2$.

Haben wir daher in Bezug auf Gerade Aufgaben zu lösen, bei denen ihre Endpunkte ausser Acht bleiben können, so lassen sich dieselben zwar auch dadurch bestimmen, dass man die Risse

zweier beliebigen Punkte a, b derselben angiebt; gewöhnlich aber werden wir, zur Bestimmung ihrer Lage, von einer auf der $\mathfrak{T}_1$ senkrechten Geraden blos den Punkt, der ihr $\mathfrak{R}_1$ ist, und von einer schiefen Geraden ihre beiden Risse zeichnen; nur bei einer zur $\mathfrak{R}$ senkrechten Geraden genügen zur Bestimmung ihrer Lage ihre Risse nicht, sondern müssen wir zwei Punkte derselben (durch ihre Risse) angeben.

Anm. Giebt man von einer zur $\mathfrak{T}_1$ senkrechten Geraden zwei Punkte an, so fallen ihre $\mathfrak{R}_1$ in einen Punkt zusammen.

20. Wir wollen nun festsetzen, wie wir die Geraden in den verschiedenen Fällen bezeichnen.

a) Ist eine unbegrenzte Gerade senkrecht auf der $\mathfrak{T}_1$, so genügt es, den Punkt zu zeichnen, der der $\mathfrak{R}_1$ der Geraden (und jedes Punktes derselben) ist. Wir bezeichnen diesen Punkt, wie alle Punkte der $\mathfrak{T}_1$, mit a_1, b_1 etc. und benennen eine solche Gerade durch den Buchstaben, mit welchem ihr $\mathfrak{R}_1$ bezeichnet ist. Wir nennen also eine zur $\mathfrak{T}_1$ senkrechte Gerade, deren $\mathfrak{R}_1$ mit a_1 bezeichnet ist, die Gerade a_1 (abg. $\mathfrak{G}(a_1)$).

b) Stehen die Risse einer unbegrenzen Geraden auf der $\mathfrak{R}$ in demselben Punkt senkrecht, und ist also die Gerade selbst senkrecht zur Kante, so müssen wir zur Bestimmung ihrer Lage (19. Satz 3.) zwei Punkte a, b von ihr (versteht sich durch ihre Risse) angeben und nennen wir sie dann (wie jede Gerade, welche die Punkte a, b enthält) die Gerade ab (abg. $\mathfrak{G}(ab)$).

c) In allen andern Fällen zeichnen wir von einer unbegrenzten Geraden ihren $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$, denken uns die Gerade selbst mit einem Buchstaben aus dem grossen lateinischen Alphabete bezeichnet und schreiben an jeden Riss derselben den nemlichen Buchstaben, rechts unten versehen mit der Ordnungszahl der Tafel, in der er liegt. Heisst z. B. die Gerade A, so bezeichnen wir ihren $\mathfrak{R}_1$ mit A_1, ihren $\mathfrak{R}_2$ mit A_2. Die Gerade A (abgekürzt $\mathfrak{G}(A)$) ist also diejenige Gerade, deren $\mathfrak{R}_1$ mit A_1 und deren $\mathfrak{R}_2$ mit A_2 bezeichnet ist. Die Gerade A selbst ist nicht gezeichnet. Es bleibt uns übrigens unbenommen, eine solche Gerade, wenn in ihr zwei Punkte a, b gegeben sind, Gerade ab zu nennen.

Fig. 5. 21. Wir haben nun noch zu untersuchen, welche verschiedene Lagen eine Gerade gegen die Tafeln annehmen kann, und wie sich dabei ihre Risse herausstellen. Wir werden folgende Fälle zu unterscheiden haben: Eine Gerade kann

a) senkrecht zu einer Tafel;
b) senkrecht zur $\mathfrak{R}$ (ohne zugleich senkrecht zu einer Tafel zu sein);
c) parallel zu einer Tafel;
d) parallel zur $\mathfrak{R}$;
e) in einer Tafel;
f) in der $\mathfrak{R}$;
g) ganz allgemein

sein.

ad a) Ist die Gerade senkrecht zur $\mathfrak{T}_1$, so ist ihr $\mathfrak{R}_1$ ein Punkt a_1; ihr $\mathfrak{R}_2$ hingegen kann kein Punkt sein, weil die Gerade auf der $\mathfrak{T}_2$ nicht senkrecht steht. Suchen wir daher, welche Gerade der $\mathfrak{R}_2$ unserer Geraden a_1 (s. 20. a.) ist. Da jeder Punkt a dieser Geraden in a_1 seinen $\mathfrak{R}_1$ und daher in a_1 seinen $\mathfrak{R}\mathfrak{R}_1$ und in a_2 seinen $\mathfrak{R}\mathfrak{R}_2$ hat, so liegt sein $\mathfrak{R}_2$ in der aus a_2 zur $\mathfrak{R}_2$ gezogenen Senkrechten a_2a_2; es ist diese also der $\mathfrak{R}_2$ unserer Geraden.

ad b) Ist die Gerade senkrecht zur $\mathfrak{R}$, und sind daher zwei Punkte derselben gegeben, hier die Punkte b und c, so liegen die beiden Risse ($b_1\,c_1$, $b_2\,c_2$) der Geraden (s. 19. Satz 3.) in einer einzigen zur Kante senkrechten Geraden.

ad c) Ist die Gerade B parallel zur $\mathfrak{T}_1$, so wird (Anh. 29.) ihre $\mathfrak{LE}_1$ die $\mathfrak{T}_1$ nach einer Geraden B_1 schneiden, die parallel zu B ist. Da ferner alle Punkte der Geraden B gleichweit von der $\mathfrak{T}_1$ abstehen, so müssen auch die $\mathfrak{R}_2$ dieser Punkte (nach 5.) gleichweit von der $\mathfrak{R}_2$ entfernt sein, daher in einer Geraden B_2 liegen, die parallel zur $\mathfrak{R}_2$ ist.

ad d) Ist die Gerade parallel zur $\mathfrak{R}$, so ist sie auch parallel zur $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$; demnach ist ihr $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ parallel zur $\mathfrak{R}$, wie dies für die $\mathfrak{G}(C)$ der Fall ist.

ad e) Liegt die Gerade in der $\mathfrak{T}_1$, so haben alle Punkte der Geraden (nach Num. 9. Satz 3, und Num. 13.) ihre $\mathfrak{R}_1$ in sich selbst und ihre $\mathfrak{R}_2$ in der $\mathfrak{R}_2$; demnach fällt diese Gerade mit ihrem $\mathfrak{R}_1$ zusammen und ihr $\mathfrak{R}_2$ liegt in der $\mathfrak{R}_2$.

ad f) In diesem Falle liegt die Gerade in $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$, also fällt ihr $\mathfrak{R}_1$ in die $\mathfrak{K}_1$ und ihr $\mathfrak{R}_2$ in die $\mathfrak{K}_2$.

ad g) Ist die Gerade zu keiner Tafel senkrecht oder parallel und auch in keiner zur $\mathfrak{K}$ senkrechten Ebene, wie die Gerade D, so ist ihr $\mathfrak{R}_1$ eine Gerade, die weder parallel noch senkrecht zur $\mathfrak{K}$ ist. Wäre sie $\parallel \mathfrak{K}$, so ständen die $\mathfrak{R}_1$ ihrer Punkte gleichweit von der $\mathfrak{K}$, also (nach 8.) ihre Punkte selhst gleichweit von der $\mathfrak{T}_2$ ab, und es müsste demnach die Gerade parallel zur $\mathfrak{T}_2$ sein. Wäre der $\mathfrak{R}_1 \perp \mathfrak{K}$, also auch (Anh. 22.) $\perp \mathfrak{T}_2$, so wäre (Anh. 16.) die $\mathfrak{LE}_1$ senkrecht zur $\mathfrak{T}_2$ und, da sie als $\mathfrak{LE}_1$ senkrecht zur $\mathfrak{T}_1$ ist, auch senkrecht zur $\mathfrak{K}$. Hieraus geht noch weiter hervor, dass eine Gerade, deren $\mathfrak{R}_1 \perp \mathfrak{K}_1$, in einer zur $\mathfrak{K}$ senkrechten Ebene liegt, und dass demnach ihr $\mathfrak{R}_2$ entweder ein Punkt ist, wenn die Gerade zufällig senkrecht zur $\mathfrak{T}_2$ steht, oder wenn dieser Zufall nicht stattfindet, dass ihr $\mathfrak{R}_2$ senkrecht steht zur $\mathfrak{K}_2$. Es gehen daraus folgende Sätze hervor:

1) Ist eine Gerade senkrecht zur $\mathfrak{T}_1$, wie die $\mathfrak{G}(a_1)$, so ist ihr $\mathfrak{R}_1$ ein Punkt, ihr $\mathfrak{R}_2$ eine zur $\mathfrak{K}$ senkrechte Gerade. (Diese Gerade trifft die $\mathfrak{K}_2$ in dem $\mathfrak{K}\mathfrak{R}_2$ des $\mathfrak{P}(a)$).
2) Ist die Gerade senkrecht zur $\mathfrak{K}$ (ohne zugleich senkrecht zu einer Tafel zu sein), so steht ihr $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ auf der $\mathfrak{K}$ in dem nemlichen Punkte senkrecht.
3) Ist die Gerade parallel zur $\mathfrak{T}_1$, so erkennt man dies daran, dass ihr $\mathfrak{R}_2$ parallel zur $\mathfrak{K}_2$ ist; ausserdem ist die Gerade selbst parallel zu ihrem $\mathfrak{R}_1$.
4) Ist eine Gerade $\parallel \mathfrak{K}$, so sind auch ihr $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ beziehungsweise $\parallel \mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$.
5) Liegt eine Gerade in der $\mathfrak{T}_1$, so erkennt man dies daran, dass ihr $\mathfrak{R}_2$ in der $\mathfrak{K}_2$ liegt; ausserdem fällt die Gerade selbst mit ihrem $\mathfrak{R}_1$ zusammen.
6) Liegt eine Gerade in der $\mathfrak{K}$, so fällt die $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ resp. mit ihrem $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ zusammen.
7) Ist eine Gerade weder parallel noch senkrecht zu einer Tafel und auch nicht senkrecht zur

$\mathfrak{R}$, so sind ihre Risse Gerade, die weder parallel noch senkrecht zur $\mathfrak{R}$ sind.

8) Es giebt also keine Gerade, deren $\mathfrak{R}_1$ senkrecht zu $\mathfrak{R}_1$ steht, während ihr $\mathfrak{R}_2$ eine Gerade ist, die nicht senkrecht zu $\mathfrak{R}_2$ steht.

Anm. Wenn eine Gerade $\parallel$ oder $\perp$ zu einer Tafel ist, so sagen wir, sie hat eine **besondere** Lage gegen die Tafeln, oder wir nennen sie ein besondere Gerade (insbesondere nennen wir sie, wie oben bemerkt wurde, ein $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$, wenn sie auf der $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$ senkrecht steht). Eine Gerade, die weder zu einer Tafel noch zur $\mathfrak{R}$ $\parallel$ oder $\perp$ ist, nennen wir eine allgemeine Gerade.

22. Da die Lage einer Ebene durch drei Punkte bestimmt ist, die nicht in einer Geraden liegen, oder durch eine Gerade und einen Punkt ausser ihr, oder durch zwei Gerade, die sich schneiden oder $\parallel$ sind, so werden wir die Lage einer Ebene graphisch bestimmen, indem wir die Risse dreier Punkte derselben, oder die Risse eines Punktes und einer Geraden, die den Punkt nicht enthält, oder zweier Geraden der Ebene zeichnen. Sind zur Bestimmung der Ebene die Punkte a, b, c gegeben, so nennen wir sie die Ebene abc (abg. $\mathfrak{E}$(abc)); sind gegeben die $\mathfrak{G}$(A) und der $\mathfrak{P}$(a), so nennen wir sie die Ebene Aa (abgek. $\mathfrak{E}$(Aa)); sind endlich gegeben die beiden Geraden A und B, so nennen wir sie die Ebene AB (abg. $\mathfrak{E}$(AB)). Was nun die Risse einer Ebene (16.) betrifft, so haben wir zu unterscheiden, ob die Ebene auf einer Tafel senkrecht steht oder nicht. Steht nemlich eine Ebene auf der $\mathfrak{T}_1$ senkrecht, so ist sie die $\mathfrak{LE}_1$ von allen ihren Geraden, und es ist daher der Durchschnitt A_1 dieser Ebene mit der $\mathfrak{T}_1$ der $\mathfrak{R}_1$ aller ihrer Geraden; also liegen in A_1 die $\mathfrak{R}_1$ aller Punkte der Ebene, oder es ist A_1 der $\mathfrak{R}_1$ der Ebene (17). Steht aber die Ebene nicht senkrecht auf der $\mathfrak{T}_1$, so kann jeder Punkt a_1 der $\mathfrak{T}_1$ der $\mathfrak{R}_1$ eines Punktes a der Ebene sein. Denn der Punkt a liegt dann in der Ebene und in dem $\mathfrak{L}_1$, welches in a_1 senkrecht zur $\mathfrak{T}_1$ errichtet wird, also im Durchschnittspunkte dieses $\mathfrak{L}_1$ und der Ebene. Ein solcher Durchschnitt ist aber allemal vorhanden, wenn die Ebene auf der $\mathfrak{T}_1$ nicht senkrecht steht. Es kann daher auch jede in der $\mathfrak{T}_1$ gezogene Gerade A_1

den $\Re_1$ einer Geraden der Ebene vorstellen, da jeder Punkt in A_1 der $\Re_1$ eines Punktes der Ebene sein kann.

Hieraus ergeben sich folgende Sätze:

1) Steht eine Ebene auf der $\mathfrak{T}_1$ senkrecht, so liegen alle $\Re_1$ ihrer Punkte und Linien in der Geraden, nach welcher sie die $\mathfrak{T}_1$ schneidet. Diese Gerade ist daher der $\Re_1$ der Ebene.

2) Steht eine Ebene auf der $\mathfrak{T}_1$ nicht senkrecht, so kann jeder Punkt und jede Linie der $\mathfrak{T}_1$ der $\Re_1$ eines Punktes oder resp. einer Linie der Ebene sein, und es ist daher der $\Re_1$ der Ebene die ganze $\mathfrak{T}_1$.

Anm. Wir werden von nun an jede auf einer Tafel senkrechte Ebene eine Lothebene ($\mathfrak{LE}$) und zwar Lothebene eins ($\mathfrak{LE}_1$) oder Lothebene zwei ($\mathfrak{LE}_2$) nennen, je nachdem sie $\perp \mathfrak{T}_1$ oder $\perp \mathfrak{T}_2$ ist; jede zu einer Tafel $\parallel$ oder $\perp$ Ebene eine besondere, jede andere eine allgemeine Ebene.

23. Steht eine Ebene auf der $\mathfrak{T}_1$ senkrecht, so ist ihre Lage durch ihren $\Re_1$ (s. 22. Satz 1.) vollkommen bestimmt; denn durch diesen lässt sich nur eine einzige Ebene legen, die zur $\mathfrak{T}_1$ senkrecht steht (Anh. 18.) Wir werden daher die Lage einer solchen Ebene dadurch bestimmen, dass wir blos ihren $\Re_1$ zeichnen. Wir bezeichnen diesen, wie jede Gerade in $\mathfrak{T}_1$ mit A_1, B_1 etc. und nennen dann die Ebene „Ebene A_1, Ebene B_1“ etc. Wir verstehen also unter Ebene A_1 abg. ($\mathfrak{E}(A_1)$) eine Ebene, die auf der $\mathfrak{T}_1$ in der Linie A_1 senkrecht steht. Ein Aehnliches ist unter $\mathfrak{E}(A_2)$ in Bezug auf die $\mathfrak{T}_2$ zu verstehen.

Anm. Wir können natürlich auch eine $\mathfrak{LE}_1$, wie eine allgemeine Ebene durch drei Punkte bestimmen. Es werden aber dann die $\Re_1$ dieser Punkte in einer Geraden liegen. Aehnliches gilt, wenn wir eine $\mathfrak{LE}$ durch zwei Gerade, oder durch einen Punkt und eine Gerade geben.

24. Eine Ebene, die zu der $\mathfrak{T}_1$ senkrecht ist, kann noch nebenbei auf der $\mathfrak{T}_2$ senkrecht stehen, oder mit der $\mathfrak{T}_2$ parallel sein. Im ersten Falle schneiden sich (Anh. 20) die Ebene und die $\mathfrak{T}_1$ nach einer Geraden, die auf der $\mathfrak{T}_2$, also auch auf der $\mathfrak{K}$ senkrecht steht. Ist aber der $\Re_1$ der Ebene $\perp \mathfrak{K}$, so folgt daraus schon, dass sie senkrecht zur $\mathfrak{T}_2$ ist. Ebenso ist es noth-

wendig und genügend, dass der $\Re_2$ der Ebene $\perp$ $\mathfrak{K}$ ist. — Im zweiten Fall schneiden sich die Ebene und die $\mathfrak{T}_1$ nach einer zur $\mathfrak{K}$ parallelen Geraden (Anh. 17.) Ist diess aber der Fall, so folgt daraus schon, dass die Ebene mit der $\mathfrak{T}_2$ parallel ist. (Anh. 33.) Es folgen hieraus die Sätze:

1) Damit eine Ebene auf beiden Tafeln, also auch auf der $\mathfrak{K}$ senkrecht steht, ist es nothwendig aber genügend, dass ihr $\Re_1$ oder auch ihr $\Re_2$ eine Gerade ist, die auf der $\mathfrak{K}$ senkrecht steht.

2) Damit eine Ebene parallel zur $\mathfrak{T}_2$ ist, ist es nothwendig aber genügend, dass ihr $\Re_1$ eine zur $\mathfrak{K}_1$ parallele Gerade ist.

Da offenbar der $\Re_1$ einer zur $\mathfrak{T}_2$ parallelen Ebene von der $\mathfrak{K}_1$ so weit entfernt ist, als die Ebene selbst von der $\mathfrak{T}_2$, so folgt, dass wenn die Ebene mit der $\mathfrak{T}_2$ zusammenfällt, ihr $\Re_1$ auf $\mathfrak{K}_1$ fällt. Hieraus folgt

3) die $\mathfrak{T}_2$ ist eine Lothebene eins deren $\Re_1$ die $\mathfrak{K}_1$ ist, oder die Ebene $\mathfrak{K}_1$ (abg. $\mathfrak{E}(\mathfrak{K}_1)$) ist die $\mathfrak{T}_2$. Es wird also die $\mathfrak{T}_2$ dadurch graphisch bestimmt, dass man die $\mathfrak{K}_1$ (welche den $\Re_1$ der $\mathfrak{T}_2$ vorstellt) zeichnet. In ähnlicher Weise wird die $\mathfrak{T}_1$ durch die $\mathfrak{K}_2$ bestimmt.

25. Mitunter bestimmt man eine Ebene durch ihre Spuren (s. 17. 4.) d. h. durch die Geraden A, B, nach denen sie die Tafeln schneidet. Da die Spuren einer Ebene und die $\mathfrak{K}$ die drei Geraden vorstellen, nach denen sich die $\mathfrak{T}_1$, die $\mathfrak{T}_2$ und die Ebene schneiden, so folgt (nach Anh. 8.) der Satz:

1) Die Spuren einer Ebene kommen entweder in einem Punkte der $\mathfrak{K}$ zusammen, oder sie sind beide parallel zur $\mathfrak{K}$.

Wollte man nun auch von einer Ebene A_1 die Spuren angeben, so ist vor Allem (22. Satz 1.) A_1 ihre erste Spur; ihre zweite Spur aber muss, weil die Ebene A_1 und die $\mathfrak{T}_2$ auf der $\mathfrak{T}_1$ senkrecht stehen, senkrecht sein zur $\mathfrak{K}$. Es könnte aber auch die Ebene A_1 zugleich $\parallel \mathfrak{T}_2$, und eine zweite Spur gar nicht vorhanden sein. Es geht hieraus hervor:

2) Die erste Spur einer Ebene A_1 ist A_1 und ihre zweite Spur ist $\perp$ $\mathfrak{R}$ oder (wenn die Ebene $\parallel \mathfrak{T}_2$ ist) gar nicht vorhanden.

26. Ehe wir diesen §. beschliessen, wollen wir noch einmal zusammengestellt aufführen die von uns angenommene Bezeichnung für die verschiedenen Lagen von Punkten, Geraden und Ebenen, und zugleich die Abkürzungen beifügen, die wir dafür anwenden.

a) Punkt a (abg. $\mathfrak{P}(a)$) bedeutet den Punkt, dessen Risse a_1, a_2 sind (6);

b) Gerade a_1 (abg $\mathfrak{G}(a_1)$) bedeutet die Gerade, welche im $\mathfrak{P}(a_1)$ auf der $\mathfrak{T}_1$ senkrecht steht (20. a.);

c) Gerade A (abg. $\mathfrak{G}(A)$) bedeutet die Gerade, deren Risse A_1, A_2 heissen (20. c.);

d) Gerade ab (abg. $\mathfrak{G}(ab)$) bedeutet die Gerade, welche durch die Punkte a und b geht;

e) Ebene A_1 (abg. $\mathfrak{E}(A_1)$) bedeutet die Ebene, welche in A_1 auf der $\mathfrak{T}_1$ senkrecht steht;

f) Ebene abc, Ebene Aa, Ebene AB (abg. $\mathfrak{E}(abc)$, $\mathfrak{E}(Aa)$, $\mathfrak{E}(AB)$) bedeutet eine Ebene, die durch die Punkte a, b, c, durch die $\mathfrak{G}(A)$ und $\mathfrak{P}(a)$, durch die Geraden A, B bestimmt ist.

Was endlich unsere Zeichnungen betrifft, so bemerken wir hier ein für allemal, dass wir alle gegebenen und gesuchten Linien durch zusammenhängende Striche (wie die Linie $\mathfrak{R}$ in Fig. 2.), alle Hilfslinien (wie a_1a_2 in Fig. 2.) durch abwechselnd auf einander folgende Striche und Punkte zeichnen.

Ferner wollen wir hier noch bemerken, dass wir in unsern Zeichnungen, damit man auch ohne Text die Aufeinanderfolge der Zeichnungsoperationen erkennen kann, zur Bezeichnung der nach einander gezeichneten Punkte und Linien die auf einander folgenden Buchstaben des Alphabets benützen werden, so dass wir den zuerst gezeichneten Punkt mit a, den zweiten mit b etc.; die zuerst gezeichnete Linie mit A, die zweite mit B etc. bezeichnen werden.

§. 2.

Mittel, die gegenseitige Lage von Punkten, Geraden und Ebenen zu erkennen.

27. Wir werden in diesem §. untersuchen, wie man aus den Zeichnungen erkennen kann, ob die durch sie bestimmten Punkte, Geraden und Ebenen gewisse Bedingungen erfüllen. Diese Bedingungen sollen folgende sein, und werden wir sie künftighin mit den ihnen in Klammern beigesetzten Zeichen bezeichnen:

a) Schneiden ($\times$),
b) Parallelsein ($\parallel$),
c) Zusammenfallen ($|$),
d) Senkrechtstehen ($\perp$).

(Es heisst also z. B. $\mathfrak{E}(AB) \parallel \mathfrak{G}(C)$ so viel als (s. auch 26.): die Ebene AB ist parallel zur Geraden C; $\mathfrak{G}(A) \mid \mathfrak{P}(a)$ so viel als: die Gerade A geht durch den Punkt a, oder der Punkt a liegt in der Geraden A).

Es sind demnach folgende Untersuchungen zu machen: Zu erkennen

1) ob ein Punkt und eine Gerade zusammenfallen,
2) ein Punkt und eine Ebene zusammenfallen,
3) ob zwei Gerade zusammenfallen,
4) parallel sind,
5) sich schneiden,
6) auf einander senkrecht stehen;
7) ob eine Gerade und eine Ebene zusammenfallen,
8) parallel sind,
9) auf einander senkrecht stehen;
10) ob zwei Ebenen zusammenfallen,
11) parallel sind,
12) auf einander senkrecht stehen.

Fig. 5. 28. Wenn ein Punkt und eine Gerade in einander fallen, so müssen (17. Satz 1.) die Risse des Punktes in den entsprechenden Rissen der Geraden liegen. Sehen wir nun zu, ob diese Bedingung auch ausreicht.

Steht die Gerade auf einer Tafel senkrecht, wie $\mathfrak{G}(a_1)$, und liegen die Risse des Punktes in denen der $\mathfrak{G}(a_1)$, wie diess für

den $\mathfrak{P}(a)$ der Fall ist, so folgt daraus schon, dass $\mathfrak{P}(a) \mid \mathfrak{G}(a_1)$; denn schon aus dem Umstande, dass a_1 der $\mathfrak{R}_1$ des $\mathfrak{P}(a)$ ist, folgt, dass er in der $\mathfrak{G}(a_1)$ liegt (s. 3.)

Haben wir eine allgemeine Gerade, wie die $\mathfrak{G}(D)$, und liegen die Risse eines $\mathfrak{P}(d)$ in denen der $\mathfrak{G}(D)$, so folgt auch hieraus im Allgemeinen, dass $\mathfrak{P}(d) \mid G(D)$. Denn die $\mathfrak{G}(D)$ liegt (19. Satz 2.) in der $\mathfrak{E}(D_1)$ und der $\mathfrak{P}(d)$ in der $\mathfrak{G}(d_1)$; nun liegt aber auch (Anh. 35.) die $\mathfrak{G}(d_1)$ in der $\mathfrak{E}(D_1)$, folglich liegt der $\mathfrak{P}(d)$ in der $\mathfrak{E}(D_1)$. Aus ähnlichen Gründen liegt auch der $\mathfrak{P}(d)$ in der $\mathfrak{E}(D_2)$. Ist nun die $\mathfrak{G}(D)$ der Durchschnitt von $\mathfrak{E}(D_1)$ und $\mathfrak{E}(D_2)$ — und diess ist (nach 19.) allemal der Fall, wenn nicht D_1 und $D_2 \perp \mathfrak{K}$ sind — so liegt der $\mathfrak{P}(d)$ in der $\mathfrak{G}(D)$. Wäre aber D_1 und $D_2 \perp \mathfrak{K}$, so wäre die $\mathfrak{G}(D)$ nicht der Durchschnitt der $\mathfrak{E}(D_1)$ mit der $\mathfrak{E}(D_2)$, und wir könnten daher auch nicht behaupten, dass $\mathfrak{P}(d)$ in der $\mathfrak{G}(D)$ liege. Es gilt daher folgender Satz:

Damit eine Gerade und ein Punkt in einander fallen, ist es nothwendig und im Allgemeinen hinreichend, dass die Risse des Punktes in den entsprechenden Rissen der Geraden liegen; eine Ausnahme hievon findet nur dann statt, wenn die Gerade senkrecht zur $\mathfrak{K}$ steht.

29. Liegt ein Punkt in einer Ebene, so müssen die Risse des Punktes in denen der Ebene liegen. Sehen wir wieder zu, ob diess genügt. Fig. 6.

Ist die Ebene auf keiner Tafel senkrecht, so sind (22. Satz 2.) die Tafeln ihre Risse. Die Bedingung also, dass die Risse des Punktes in denen der Ebene liegen sollen, ist die nemliche als die, dass die Risse des Punktes in den Tafeln liegen sollen, was natürlich ohnedies stattfindet und daher nicht genügen kann.

Hat man aber eine $\mathfrak{E}(A_1)$ und einen $\mathfrak{P}(a)$, so liegt dieser schon in der Ebene, wenn nur sein $\mathfrak{R}_1$ in dem $\mathfrak{R}_1$ der $\mathfrak{E}(A_1)$ liegt; denn in diesem Falle liegt der Punkt in der $\mathfrak{G}(a_1)$; da aber die $\mathfrak{G}(a_1)$ in der $\mathfrak{E}(A_1)$ liegt (Anh. 35), so liegt auch der $\mathfrak{P}(a)$ in der $\mathfrak{E}(A_1)$. Es ergiebt sich daher folgender Satz:

Damit ein $\mathfrak{P}(a)$ in einer $\mathfrak{E}(A_1)$ liegt, ist es nothwendig, aber auch hinreichend, dass a_1 in der $\mathfrak{G}(A_1)$ liegt.

Steht die Ebene auf keiner Tafel senkrecht, so müssen von ihr bekanntlich drei Punkte oder eine Gerade und ein Punkt oder zwei Gerade gegeben sein; dann ist ausser den gegebenen Punkten der Ebene nur von denjenigen Punkten zu behaupten, dass sie der Ebene angehören, die in einer Geraden der Ebene liegen (s. 28.)

30. Sollen zwei Gerade zusammenfallen, so müssen ihre $\mathfrak{R}_1$ sowohl, als auch ihre $\mathfrak{R}_2$ zusammenfallen. Dies genügt aber auch im Allgemeinen. Denn stehen die Geraden auf der $\mathfrak{T}_1$ senkrecht, so genügt es schon, wenn ihre $\mathfrak{R}_1$ zusammenfallen, weil durch den Punkt, der ihren $\mathfrak{R}_1$ vorstellt, nur eine Senkrechte zur $\mathfrak{T}_1$ möglich ist. Stehen aber die Geraden auf keiner Tafel senkrecht, und fallen sowohl ihre $\mathfrak{R}_1$ als ihre $\mathfrak{R}_2$ zusammen, so haben beide die nemliche $\mathfrak{LE}_1$ und die nemliche $\mathfrak{LE}_2$, jede von beiden ist also die Gerade, welche die $\mathfrak{LE}_1$ und die $\mathfrak{LE}_2$ gemein haben. Im Allgemeinen haben aber die beiden Lothebenen nur eine Gerade gemein. Sind jedoch beide Risse in demselben Punkte der $\mathfrak{K}$ auf dieser senkrecht, dann haben die ihnen entsprechenden Lothebenen unendlich viele Gerade gemein, und dann fallen die Geraden nicht nothwendig zusammen. Es geht hieraus der Satz hervor:

> Damit zwei Gerade zusammenfallen, ist es nothwendig und im Allgemeinen genügend, dass sowohl ihre $\mathfrak{R}_1$ als auch ihre $\mathfrak{R}_2$ zusammenfallen; eine Ausnahme hievon macht nur der Fall, wenn die Geraden in einer zur $\mathfrak{K}$ senkrechten Ebene liegen.

Fig. 7. 31. Wenn zwei Gerade sich schneiden, so müssen (nach 17. Satz 3.) ihre $\mathfrak{R}_1$ sowohl, als ihre $\mathfrak{R}_2$ wenigstens einen Punkt gemein haben. Dabei kann es auch sein, dass ihre $\mathfrak{R}_1$ oder $\mathfrak{R}_2$ mehr als einen Punkt gemein haben, also zusammenfallen. Es sind daher folgende verschiedene Fälle möglich:

1) Es ist der $\mathfrak{R}_1$ der einen Geraden ein Punkt a_1, der $\mathfrak{R}_2$ der anderen Geraden ein Punkt a_2; sollen sich diese Geraden schneiden, so müssen a_1, a_2 die Risse des Schnittpunktes sein, folglich müssen a_1 und a_2 in einer zur $\mathfrak{K}$ senkrechten Geraden liegen.

2) Es ist der $\mathfrak{R}_1$ der einen Geraden eine Gerade A_1, der der andern ein $\mathfrak{P}(a_1)$ in der $\mathfrak{G}(A_1)$. In diesem Falle geht hieraus schon hervor, dass beide Gerade in der $\mathfrak{E}(A_1)$ liegen und, da sie nicht parallel sind, sich schneiden (parallel können sie desshalb nicht sein, weil die eine $\perp$ $\mathfrak{T}_1$ ist, die andere nicht.)

3) Es sind die $\mathfrak{R}_1$ der beiden Geraden B und C Gerade, die zusammenfallen, während B_2 und C_2 sich schneiden. In diesem Falle haben die beiden Geraden den $\mathfrak{P}(b)$ (und nur diesen) gemein, dessen $\mathfrak{R}_2$ im Durchschnitt von B_2 und C_2 und dessen $\mathfrak{R}_1$ in B_1 liegt.

4) Es schneiden sich sowohl die $\mathfrak{R}_1$ der Geraden D, E, als auch ihre $\mathfrak{R}_2$. In diesem Falle muss, wenn die Geraden sich schneiden sollen, der $\mathfrak{R}_1$ des Schnittpunktes in c_1 (wo sich D_1 und E_1 schneiden), der $\mathfrak{R}_2$ desselben in c_2 sein; es müssen dann aber noch c_1 und c_2 der $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ eines Punktes sein, also, nach der gewöhnlichen Umklappungsart senkrecht übereinanderliegen. Dies genügt aber auch im Allgemeinen. Denn es liegt dann der $\mathfrak{P}(c)$ in der $\mathfrak{G}(D)$ und in der $\mathfrak{G}(E)$, also haben sie diesen Punkt gemein, und da sie nur diesen Punkt gemein haben, so schneiden sie sich. Eine Ausnahme hievon findet nur dann statt, wenn eine der beiden Geraden $\perp$ $\mathfrak{R}$ ist; denn dann können wir nicht behaupten, dass der Punkt c in ihr liegt. (28. Satz). Es geht hieraus folgender Satz hervor:

> Wenn die Risse eines Punktes in den entsprechenden Rissen zweier Geraden liegen, die nicht zusammenfallen (30.), so schneiden sich die Geraden im Allgemeinen in diesem Punkte. Eine Ausnahme hievon findet statt, wenn eine von den Geraden $\perp$ $\mathfrak{R}$ ist.

32. Sollen zwei Gerade parallel sein, so muss, wenn eine auf der $\mathfrak{T}_1$ senkrecht ist, es auch die andere sein. Sind sie aber nicht senkrecht auf einer Tafel, so können sie entweder in einer zur $\mathfrak{T}_1$ senkrechten Ebene liegen oder nicht. Im ersten Falle ist die Ebene, in der sie liegen, die $\mathfrak{LE}_1$ von beiden, und es fallen daher ihre $\mathfrak{R}_1$ zusammen. Im zweiten Falle, wo also ihre $\mathfrak{LE}_1$ nicht zusammenfallen, sind die Lothe in der einen $\mathfrak{LE}_1$ parallel zu denen in der andern, und die Gerade in der einen parallel zur Geraden in der andern. Da nun die Geraden und die Lothe

Fig. 8.

nicht parallel sind (weil wir vorausgesetzt haben, dass die Geraden auf keiner Tafel senkrecht stehen), so müssen (Anh. 38.) diese $\mathfrak{L}\mathfrak{E}_1$ parallel sein und demnach die $\mathfrak{T}_1$ nach parallelen Linien schneiden, d. h. es müssen die $\mathfrak{R}_1$ der Geraden parallel sein. Wenn also zwei Gerade, die auf der $\mathfrak{T}_1$ nicht senkrecht stehen, parallel sind, so müssen ihre $\mathfrak{R}_1$ parallel sein. (Zwei Gerade, die zusammenfallen, sind auch parallel). Dasselbe lässt sich auch für ihre $\mathfrak{R}_2$ nachweisen. Es genügt aber auch im Allgemeinen, damit zwei Gerade parallel sind, wenn sowohl ihre $\mathfrak{R}_1$ als $\mathfrak{R}_2$ parallel sind. Denn in diesem Falle ist die eine der Durchschnitt von zwei Ebenen (der $\mathfrak{L}\mathfrak{E}_1$ und der $\mathfrak{L}\mathfrak{E}_2$), die mit den Ebenen, die sich nach der andern Geraden schneiden, parallel sind. (Anh. 39.) Man sieht, es bietet wieder der Fall eine Ausnahme, wo die $\mathfrak{L}\mathfrak{E}_1$ und die $\mathfrak{L}\mathfrak{E}_2$ der Geraden sich nicht schneiden, d. i. wo die Geraden $\perp \mathfrak{K}$ sind. Demnach erhalten wir den Satz:

> Sollen zwei Gerade parallel sein, so müssen entweder beide auf derselben Tafel senkrecht stehen (wie $\mathfrak{G}(a_1)$ und $\mathfrak{G}(b_1)$), oder es ist nothwendig, aber im Allgemeinen genügend, dass ihre $\mathfrak{R}_1$ sowohl, als auch ihre $\mathfrak{R}_2$ parallel sind (wie $\mathfrak{G}(A)$ und $\mathfrak{G}(B)$ oder $\mathfrak{G}(C)$ und $\mathfrak{G}(D)$. Eine Ausnahme von dieser Regel bietet nur der Fall, wenn die Risse der Geraden $\perp \mathfrak{K}$ sind.

Anm. Nachdem wir aus den Rissen zweier Geraden erkennen können, ob sie zusammenfallen, sich schneiden, oder parallel sind, so sind wir natürlich auch im Stande, zu sagen, ob sie nicht in einer Ebene liegen. Es wird diess der Fall sein, wenn sie weder zusammenfallen, noch sich schneiden oder parallel sind. Zwei solche Gerade, die nicht in einer Ebene liegen, nennt man windschiefe, oder man sagt von ihnen sie kreuzen sich.

Fig. 9. 33. Wir haben oben gesehen, dass wir zur Bestimmung der Lage einer schiefen Ebene gegen irgend etwas anderes blos die von ihr gegebenen Punkte und Linien benützen können, indem die Risse einer jeden schiefen Ebene die Tafeln selbst sind, und demnach über die Lage der Ebene keinen Aufschluss geben. Wir können demnach nur dann behaupten, dass eine $\mathfrak{G}(A)$ und eine schiefe Ebene

a) zusammenfallen, wenn die $\mathfrak{G}(A)$ zwei Punkte der Ebene enthält (28.), oder durch einen Punkt der Ebene geht und mit einer Geraden der Ebene parallel ist (32.);

b) parallel sind, wenn die $\mathfrak{G}(A)$ mit einer Geraden der Ebene parallel ist.

Steht aber die Ebene $\perp \mathfrak{T}_1$, wie die $\mathfrak{E}(A_1)$ und soll

α) eine Gerade mit ihr zusammenfallen, so muss der $\mathfrak{R}_1$ der Geraden in $\mathfrak{G}(A_1)$ liegen; dies ist aber auch genügend; denn ist $\mathfrak{G}(A_1)$ der $\mathfrak{R}_1$ einer $\mathfrak{G}(A)$, so ist $\mathfrak{E}(A_1)$ ihre $\mathfrak{LE}_1$ und es ist daher $\mathfrak{G}(A) \mid \mathfrak{E}(A_1)$. Ist der in der $\mathfrak{G}(A_1)$ liegende $\mathfrak{P}(a_1)$ der $\mathfrak{R}_1$ einer $\mathfrak{G}(a_1)$, so ist wieder (nach Anh. 35.) $\mathfrak{G}(a_1) \mid \mathfrak{E}(A_1)$.

β) Soll eine Gerade $\parallel \mathfrak{E}(A_1)$ sein, so kann sie entweder $\perp \mathfrak{T}_1$ sein, wie die $\mathfrak{G}(b_1)$, oder es muss, wenn dies nicht der Fall ist, ihre $\mathfrak{LE}_1 \parallel \mathfrak{E}(A_1)$, also auch ihr $\mathfrak{R}_1 \parallel A_1$ sein. Ist aber dies der Fall, so folgt schon daraus, dass ihre $\mathfrak{LE}_1 \parallel \mathfrak{E}(A_1)$, daher auch, dass die Gerade selbst $\parallel \mathfrak{E}(A_1)$ ist. Es gehen hieraus folgende Sätze hervor:

1) Damit eine Gerade und eine $\mathfrak{E}(A_1)$ zusammenfallen, ist es nothwendig, aber genügend, dass der $\mathfrak{R}_1$ der Geraden in dem $\mathfrak{R}_1$ der Ebene liegt.

2) Soll eine Gerade $\parallel \mathfrak{E}(A_1)$ sein, so muss sie entweder $\perp \mathfrak{T}_1$ sein, wie $\mathfrak{G}(b_1)$, oder es ist nothwendig, aber hinreichend, dass der $\mathfrak{R}_1$ der Geraden eine Parallele zu A_1 ist, wie diess bei der $\mathfrak{G}(B)$ der Fall ist.

3) Sollen daher eine Gerade und eine $\mathfrak{E}(A_1)$ sich schneiden, also nicht parallel sein, so ist es nothwendig, aber genügend, dass der $\mathfrak{R}_1$ der Geraden die $\mathfrak{G}(A_1)$ schneidet.

34. Von zwei schiefen Ebenen können wir behaupten,

a) dass sie zusammenfallen, wenn zwei Gerade der einen Ebene in der andern liegen. (33. a.);

b) dass sie parallel sind, wenn zwei sich schneidende Gerade der einen Ebene parallel sind zur andern Ebene. (33. b);

c) dass sie sich schneiden, wenn eine Gerade der einen Ebene die andere Ebene schneidet.

Ist die eine Ebene senkrecht zur $\mathfrak{T}_1$, die andere nicht, so müssen sie sich allemal schneiden.

Sind zwei Ebenen senkrecht auf der $\mathfrak{T}_1$, wie $\mathfrak{E}(A_1)$ und $\mathfrak{E}(B_1)$, so werden sie zusammenfallen, oder parallel sein, oder sich schneiden, je nachdem $A_1 \mid B_1$ oder $A_1 \parallel B_1$ oder $A_1 \times B_1$. (Anh. 18. 33.)

Fig. 10. 35. Soll eine $\mathfrak{G}(a_1)$ auf einer Ebene senkrecht stehen, so muss diese $\parallel \mathfrak{T}_1$, also ihr $\mathfrak{R}_2 \parallel \mathfrak{K}_2$ sein.

Soll eine $\mathfrak{G}(A)$ auf einer Ebene senkrecht stehen, so muss die $\mathfrak{E}(A_1)$ zur gegebenen Ebene senkrecht sein (Anh. 16.); da aber auch $\mathfrak{E}(A_1) \perp \mathfrak{T}_1$, so ist zugleich $\mathfrak{E}(A_1) \perp$ zur ersten Spur der Ebene. Ist aber diese erste Spur der Ebene $\perp \mathfrak{E}(A_1)$, so ist sie auch $\perp A_1$. Ebenso lässt sich zeigen, dass die zweite Spur der Ebene $\perp A_2$ sein muss. Wir sehen daher, dass, wenn eine Gerade auf einer Ebene senkrecht stehen soll, die Risse der Geraden auf den entsprechenden Spuren der Ebene senkrecht stehen müssen. Es ist diess aber auch genügend; denn ist die Spur eins der Ebene $\perp A_1$, also auch $\perp \mathfrak{E}(A_1)$, so ist auch die Ebene selbst $\perp \mathfrak{E}(A_1)$. Ebenso folgt aus dem Umstande, dass $A_2 \perp$ zur zweiten Spur der Ebene, dass diese $\perp \mathfrak{E}(A_2)$. Es ist daher auch der Durchschnitt der $\mathfrak{E}(A_1)$ und der $\mathfrak{E}(A_2)$, d. i. die $\mathfrak{G}(A) \perp$ zur Ebene. Man sieht wieder, dass eine Gerade, die $\perp \mathfrak{K}$, deren Lothebenen zusammenfallen, eine Ausnahme bietet. Es gilt demnach folgender Satz:

> Sollen eine Ebene und eine Gerade auf einander senkrecht stehen, so muss entweder die Gerade senkrecht auf einer Tafel und die Ebene parallel zu dieser sein, oder es ist nothwendig, aber im Allgemeinen genügend, dass die Risse der Geraden senkrecht stehen auf den entsprechenden Spuren der Ebene. Eine Ausnahme bietet nur der Fall, wo die Gerade $\perp \mathfrak{K}$ ist.

Anm. Ist die Ebene $\perp \mathfrak{T}_1$, wie die $\mathfrak{E}(D_1)$, so ist (25. Satz 2.) D_1 die erste Spur und eine Senkrechte zur $\mathfrak{K}$ die zweite Spur der Ebene; es muss also $E_1 \perp D_1$ und $E_1 \parallel \mathfrak{K}$, daher $\mathfrak{G}(E) \parallel \mathfrak{T}_1$ sein, wenn die $\mathfrak{G}(E) \perp \mathfrak{E}(D_1)$ sein soll.

Fig. 11. 36. Sollen zwei Gerade auf einander senkrecht stehen, so muss durch eine derselben eine Ebene gelegt werden können, die auf der andern senkrecht steht. Da wir nun von jeder allgemeinen Geraden zwei sie enthaltende Ebenen haben, nemlich die Loth-

ebenen, so können wir unmittelbar nur dann behaupten, dass zwei allgemeine Gerade auf einander senkrecht sind, wenn eine Lothebene der einen Geraden senkrecht steht auf der andern. Soll aber diess der Fall sein, so muss diese Gerade, da sie auf einer Lothebene senkrecht steht (s. 35. Anm.) $\| \mathfrak{T}$ sein. Ist diess der Fall, ist nemlich $\mathfrak{G}(A) \| \mathfrak{T}_1$ und ist $A_1 \perp B_1$, so ist auch $\mathfrak{G}(A) \perp \mathfrak{E}(B_1)$, also $\mathfrak{G}(A) \perp \mathfrak{G}(B)$. Ist aber eine der beiden Geraden $\perp \mathfrak{T}_2$, wobei sie also ebenfalls $\| \mathfrak{T}_1$ ist, (wie $\mathfrak{G}(a_2)$), so ist es nothwendig, aber genügend, dass die zweite Gerade $\| \mathfrak{T}_2$ ist. Diese Gerade ist daher entweder eine $\mathfrak{G}(b_1)$ oder eine $\mathfrak{G}(C)$, deren $\mathfrak{R}_1$, nemlich C_1, $\| \mathfrak{K}$ ist. Man sieht demnach, dass man in der Zeichnung nur dann unmittelbar erkennen kann, ob zwei Gerade auf einander senkrecht stehen, wenn wenigstens eine von ihnen parallel zu einer Tafel ist, und es gilt folgender Satz:

> Sollen zwei Gerade, von denen eine parallel zur $\mathfrak{T}_1$ ist, auf einander senkrecht stehen, so ist entweder die eine Gerade $\perp \mathfrak{T}_2$, und die andere $\| \mathfrak{T}_2$, oder es ist nothwendig, aber hinreichend, dass die $\mathfrak{R}_1$ der beiden Geraden auf einander senkrecht stehen.

37. Sollen zwei Ebenen auf einander senkrecht stehen, so muss eine Gerade der einen Ebene senkrecht auf der andern stehen. Wir können demnach nur dann unmittelbar erkennen, ob zwei Ebenen auf einander senkrecht stehen, wenn von einer Ebene die Spuren bekannt sind und von der andern eine Gerade vorhanden ist, deren Risse auf diesen Spuren senkrecht stehen (35.)

§. 3.

Aufgaben über Punkte, Gerade und Ebenen.

38. In jeder Aufgabe des vorliegenden §. sind gegeben: Punkte, Gerade und Ebenen und gesucht: ein Punkt, eine Gerade oder Ebene, welche zu dem Gegebenen in den oben (27. a., b., c., d.) aufgeführten Beziehungen stehen sollen. Ist nun

a) ein Punkt gesucht, so wird in allen Aufgaben, die wir vorläufig in Bezug auf ihn bekommen können, verlangt, er soll in gegebenen Dingen liegen;

b) Ist eine Ebene gesucht, und haben die gegebenen Geraden oder Ebenen eine besondere Lage gegen die Tafeln, d. h. sind dieselben $\parallel$ oder $\perp$ zu einer Tafel, so überlegen wir vor allem, ob nicht die gesuchte Ebene eine Lothebene ($\mathfrak{LE}$) ist, d. h. auf einer Tafel, z. B. auf der $\mathfrak{T}_1$, senkrecht steht. In diesem Falle suchen wir blos ihren $\mathfrak{R}_1$ (der bekanntlich eine in der $\mathfrak{T}_1$ gezeichnete Gerade ist), dessen Lage aus den gegebenen Bedingungen hervorgeht. Wird aber die Ebene nicht senkrecht zu einer Tafel, oder haben die gegeben Geraden und Ebenen keine besondere Lage gegen die Tafeln, so suchen wir uns durch die gegebenen Bedingungen zwei Gerade zu verschaffen, welche die gesuchte Ebene enthalten muss. Wir wollen die Mittel, die uns die Elementargeometrie dazu darbietet, hier zusammenstellen.

I) Soll eine Ebene parallel zu einer Geraden A sein, so muss jede Gerade, die durch einen Punkt der Ebene geht, und $\parallel$ A ist, in der Ebene liegen.

II) Soll eine Ebene senkrecht zu einer zweiten Ebene sein, so muss jede Gerade, die durch einen Punkt der ersten Ebene geht und zur zweiten Ebene senkrecht steht, in der ersten Ebene liegen.

III) Soll eine Ebene mit einer zweiten Ebene parallel sein, so muss jede Gerade, die durch einen Punkt der ersten Ebene geht und mit einer Geraden der zweiten Ebene parallel ist, in der ersten Ebene liegen.

IV) Soll eine Ebene auf einer Geraden A senkrecht stehen, so muss jede Gerade, die durch einen Punkt der Ebene geht, und auf der Geraden A senkrecht steht, in der Ebene liegen.

Diese vier Sätze lassen sich zusammenfassen in folgenden Satz:

V. Wenn eine Gerade einen Punkt einer Ebene enthält und zugleich eine Bedingung ($\parallel$ oder $\perp$) der Ebene erfüllt, so liegt sie in der Ebene.

c) Ist eine Gerade gesucht, und haben die gegebenen Geraden und Ebenen besondere Lagen gegen die Tafeln, so untersuchen wir zunächst, ob nicht diese gesuchte Gerade ein $\mathfrak{L}$ ist, d h. auf einer Tafel, z. B. der $\mathfrak{T}_1$, senkrecht steht. In diesem Falle ist ihr $\mathfrak{R}_1$ ein Punkt, den wir allein durch die gegebenen Bedingungen aufzusuchen haben. Ist aber die Gerade kein $\mathfrak{L}$, so suchen wir uns durch die gegebenen Bedingungen zu verschaffen entweder zwei Punkte derselben (dann ist sie hinreichend bestimmt), oder einen Punkt und ihre Richtung, d. h. eine Gerade, mit der sie parallel ist. In letzterem Falle kann man mittelst der Sätze in Nr. 22 und 32 die Risse der Geraden zeichnen. Zur Auffindung der Richtung einer Geraden dienen folgende Bedingungen, die in nachstehender Weise verwendet werden:

VI. Ist eine Gerade senkrecht zu einer Ebene, so ist jede Senkrechte zu dieser Ebene die Richtung der gesuchten Geraden.

VII. Ist eine Gerade parallel mit zwei Ebenen, so ist der Schnitt beider Ebenen ihre Richtnng.

VIII. Ist eine Gerade senkrecht zu zwei Geraden, so ist sie parallel mit zwei Ebenen, die bezw. auf den beiden Geraden senkrecht stehen, oder senkrecht zu einer Ebene, die mit beiden Geraden parallel ist.

IX. Ist eine Gerade parallel zu einer Ebene und senkrecht zu einer Geraden A, so ist sie auch parallel mit einer zu A senkrechten Ebene, und der Schnitt dieser und der gegebenen Ebene geben die Richtung.

Zur Aufsuchung eines Punktes einer Geraden dient folgender Satz:

X. Soll eine Gerade in einer Ebene liegen, und eine gegebene Gerade A schneiden, so enthält sie den Schnittpunkt der Ebene mit der Geraden A.

Haben wir so die gegebenen Bedingungen benützt, um das Gesuchte zu erhalten, so kann es sein, dass es nur eine einzige Lage gibt, die es einnehmen kann; in diesem Falle sagen wir: die Aufgabe oder das Gesuchte ist vollkommen oder eindeutig bestimmt. Gibt es aber zwei, drei oder mehrere Lagen, die das Gesuchte einnehmen kann, so sagen wir: es ist

unvollkommen oder zwei-, drei- etc. deutig bestimmt. Gibt es unzählige stetig auf einander folgende Lagen, die das Gesuchte einnehmen kann, so sagen wir: es ist unbestimmt.

Gibt es keine Lage des Gesuchten, die den gegebenen Bedingungen entspricht, so sagen wir: es ist unmöglich.

Anm. Wir geben in dem vorliegenden §. lauter Aufgaben, die im Allgemeinen vollkommen bestimmt sind, in denen daher so viele Bedingungen für das Gesuchte gegeben sind, dass es nur eine einzige Lage gibt, die es einnehmen darf. Kann der Schüler solche Aufgaben lösen, so wird es ihm nicht schwer fallen, das Gesuchte auch dann zu finden, wenn die angegebenen Bedingungen zur vollkommenen Bestimmung desselben nicht ausreichen. Denn in diesem Falle steht es ihm frei, so viele Bedingungen hinzuzufügen, als zur Bestimmung des Gesuchten nothwendig sind; er kann dann noch dazu diese Bedingungen so einrichten, dass das Gesuchte sich möglichst einfach bestimmen lässt; so z. B. wird man, wenn eine Ebene oder eine Gerade nicht bestimmt genug ist, womöglich die Bedingung hinzufügen, dass sie zu einer Tafel $\perp$ oder $\parallel$ ist.

Hat man aber eine vorgelegte Aufgabe gelöst, so darf man sich dabei nicht beruhigen; denn die Lösung der Aufgabe bezieht sich auf Linien und Punkte von bestimmten Lagen, und man kann daher nicht wissen, ob nicht besondere Lagen der gegebenen Dinge vorkommen können, auf die wir nicht gefasst sind. Daher muss man jede Aufgabe diskutiren, d. h. alle die verschiedenen Fälle untersuchen, die möglicher Weise erscheinen können; erst dann kann man sagen, dass die Aufgabe erschöpfend behandelt ist. Wie man aber die Aufgabe diskutirt, werden wir in vielen der folgenden Beispiele zu zeigen Gelegenheit haben. Um dergleichen Diskussionen zu vereinfachen, werden wir von parallelen Geraden oder Ebenen sagen, sie schneiden sich in unendlicher Ferne.

Fig. 7. 39. Aufg. Den Durchschnittspunkt zweier Geraden zu finden.

Aufl. Zwei Gerade werden sich nur dann schneiden, wenn die oben (31.) aufgeführten Bedingungen erfüllt sind. Ist dies aber der Fall, so stellt sich damit auch der $\mathfrak{P}$(a) heraus, nach welchem sie sich schneiden.

40. Aufg. Es ist gegeben, (Fig. a) eine $\mathfrak{E}(A_1)$ und eine Gerade, die sie schneidet; gesucht der Schnittpunkt. Fig. 12.

Aufl. Der gesuchte Punkt muss seinen $\mathfrak{R}_1$ in der $\mathfrak{G}(A_1)$ und in dem $\mathfrak{R}_1$ der Geraden haben; sein $\mathfrak{R}_2$ muss in dem $\mathfrak{R}_2$ der Geraden liegen. Es ist also $\mathfrak{P}(a)$ oder $\mathfrak{P}(b)$ der gesuchte Punkt, je nachdem $\mathfrak{G}(a_2)$ oder $\mathfrak{G}(B)$ die gegebene Gerade ist.

Anm. Mit Hülfe dieser Aufgabe können wir auch die Spuren einer Geraden (s. 17. 4.) finden. Denn die erste Spur einer $\mathfrak{G}(A)$ ist nichts anderes, als der Durchschnitt der $\mathfrak{G}(A)$ mit der $\mathfrak{T}_1$, d. i. mit der Ebene, deren $\mathfrak{R}_2$ die $\mathfrak{K}_2$ ist. Es liegt also von der zweiten Spur der $\mathfrak{G}(A)$ (Fig. b) der $\mathfrak{R}_2$ in A_2 und in $\mathfrak{K}_2$, der $\mathfrak{R}_1$ in A_1; es ist also $\mathfrak{P}(a)$ die erste Spur der $\mathfrak{G}(A)$. Ebenso findet man, dass $\mathfrak{P}(b)$ die zweite Spur derselben ist.

41. Aufg. Es ist gegeben eine $\mathfrak{E}(A_1)$ und eine zweite Ebene, die ebenfalls auf einer Tafel senkrecht steht; gesucht der Schnitt der beiden Ebenen. Fig. 13.

Aufl. Die Bedingung, dass die gesuchte Gerade in $\mathfrak{E}(A_1)$ liegen soll, drückt (nach 33. Satz 1.) dasselbe aus, als die, dass der $\mathfrak{R}_1$ der Geraden in der $\mathfrak{G}(A_1)$ liegen soll.

1) Ist nun (Fig. a) die zweite Ebene eine $\mathfrak{E}(B_1)$, so muss der $\mathfrak{R}_1$ der gesuchten Schnittlinie auch in der $\mathfrak{G}(B_1)$, also im Punkte a_1 sein, nach welchem $\mathfrak{G}(A_1) \times \mathfrak{G}(B_1)$. Es ist demnach in diesem Falle die gesuchte Schnittlinie die $\mathfrak{G}(a_1)$.

2) Ist (Fig. b) die zweite Ebene eine $\mathfrak{E}(B_2)$, die zugleich auf der $\mathfrak{T}_1$ senkrecht steht, so ist (s. 24. und 25.) der $\mathfrak{R}_1$ dieser Ebene die $\mathfrak{G}(C_1)$, welche mit B_2 zusammmenfällt, und es ist wieder der $\mathfrak{P}(a_1)$, in welchem $\mathfrak{G}(A_1) \times \mathfrak{G}(C_1)$ der $\mathfrak{R}_1$ der gesuchten Schnittlinie.

3) Ist die zweite Ebene eine $\mathfrak{E}(A_2)$, die nicht auf der $\mathfrak{T}_1$ senkrecht steht, und ist $\mathfrak{E}(A_1)$ nicht senkrecht zur $\mathfrak{T}_2$, so ist die Schnittlinie eine schiefe Gerade, deren Risse A_1, A_2 sind, also die $\mathfrak{G}(A)$.

4) Ist der Riss der ersten Ebene und der der zweiten senkrecht zur $\mathfrak{K}$, so sind die Ebenen parallel.

42. Aufg. Es ist gegeben eine $\mathfrak{E}(A_1)$ und eine schiefe Ebene; man sucht die Schnittlinie der beiden Ebenen. Fig. 14.

Aufl. Da die gesuchte Gerade in einer schiefen Ebene liegt, also auf keiner Tafel senkrecht steht, so ist ihr $\mathfrak{R}_1$ eine Gerade,

und zwar, weil sie in der $\mathfrak{E}(A_1)$ liegt, die $\mathfrak{G}(A_1)$. Die vorliegende Aufgabe stimmt also ganz mit der Aufgabe überein, eine Gerade einer schiefen Ebene zu finden, deren $\mathfrak{R}_1$ die $\mathfrak{G}(A_1)$ ist.

Wäre nun blos verlangt, eine beliebige Gerade einer schiefen Ebene, z. B. der $\mathfrak{E}(abc)$ (Fig. a) zu finden, so würden wir entweder eine $\mathfrak{G}(A)$ angeben, die durch zwei Punkte a, b der Ebene geht, deren Risse also die Risse dieser Punkte enthalten müssten (27.), oder eine $\mathfrak{G}(B)$, die durch einen $\mathfrak{P}(c)$ der Ebene geht und mit einer $\mathfrak{G}(A)$ der Ebene parallel ist, wobei wir (nach 29.) statt der gegebenen Punkte auch solche nehmen können, die in Geraden der Ebene liegen. Da aber verlangt ist, dass $\mathfrak{G}(A_1)$ der $\mathfrak{R}_1$ der gesuchten Geraden sein soll, so kann diese nur solche Punkte enthalten, deren $\mathfrak{R}_1$ in A_1 liegen (28.) und nur mit solchen Geraden parallel sein, deren $\mathfrak{R}_1 \parallel A_1$ sind (32). Wir werden daher die gesuchte Gerade auf folgendem Wege finden:

1) wenn die Geraden B, C der $\mathfrak{E}(BC)$ so liegen, dass $A_1 \times B_1$ und $\times C_1$ (Fig. b). In diesem Falle können wir unmittelbar zwei Punkte a, b der Ebene finden, die der gesuchten Geraden angehören, diejenigen nemlich, deren $\mathfrak{R}_1$ im Durchschnitte der $\mathfrak{G}(A_1)$ mit $\mathfrak{G}(B_1)$ und $\mathfrak{G}(C_1)$ liegen; es ist dann die $\mathfrak{G}(A)$, welche die Punkte a, b enthält, die gesuchte Gerade;

2) wenn (wie Fig. c) $A_1 \times B_1$ und $\parallel C_1$. In diesem Falle bekommen wir unmittelbar nur einen Punkt a der gesuchten Geraden A; aber da diese die $\mathfrak{G}(C)$ nicht schneidet und doch mit ihr in einer Ebene liegt, so muss sie parallel zur $\mathfrak{G}(C)$ sein und es ist daher auch $A_2 \parallel C_2$;

3) wenn (wie Fig. d) $A_1 \parallel B_1 \parallel C_1$. In diesem Falle muss wieder $A_2 \parallel B_2$ sein; um aber einen $\mathfrak{P}(a)$ der gesuchten $\mathfrak{G}(A)$ zu erhalten, müssen wir vorerst eine $\mathfrak{G}(D)$ der Ebene aufsuchen, die mit $\mathfrak{G}(A)$ nicht parallel ist, also auch die $\mathfrak{G}(B)$ und $\mathfrak{G}(C)$ schneidet. Haben wir die $\mathfrak{G}(D)$, so lässt sich die $\mathfrak{G}(A)$ mit Hülfe der Geraden B und D ebenso, wie im vorhergehenden Falle durch die Geraden B und C finden.

4) Sind von der schiefen Ebene drei Punkte gegeben, so verschaffen wir uns zuerst zwei beliebige Gerade der Ebene, und suchen dann mit Hülfe derselben die $\mathfrak{G}(A)$.

Anm. Ehe wir zu folgenden Aufgaben übergehen, müssen wir noch bemerken, dass in denselben die gegebenen

und gesuchten Dinge alle möglichen Lagen gegen die Tafeln haben können, nur werden wir es vermeiden, eine Gerade auftreten zu lassen, die senkrecht zur $\mathfrak{R}$ steht (deren beide Risse bekanntlich $\perp \mathfrak{R}$ stehen, und die nur durch zwei Punkte gegeben werden müssen), da die Lage einer solchen Geraden gegen andere Dinge aus der Zeichnung nicht erkennbar ist, und dadurch Aufgaben in Bezug auf dieselbe schwer lösbar werden. Die Mittel zur Lösung von Aufgaben, in denen auch solche Gerade vorkommen, werden sich in dem nächsten §. ergeben.

13. Aufg. Es ist gegeben eine $\mathfrak{E}(abc)$, gesucht die zweite Spur dieser Ebene. Fig. 15.

Aufl. Da die zweite Spur der Ebene ihr Durchschnitt mit mit der $\mathfrak{T}_2$ ist, so ist die vorliegende Aufgabe ein besonderer Fall der vorhergehenden, den Durchschnitt einer schiefen Ebene mit einer $\mathfrak{LE}_1$ zu finden. Diese $\mathfrak{LE}_1$ ist hier die $\mathfrak{T}_2$ und ihr $\mathfrak{R}_1$ ist daher die $\mathfrak{R}_1$. Da wir aber die $\mathfrak{R}_1$ beliebig annehmen können, wenn sie nur parallel zum vorderen Rande des Blattes ist, so wählen wir sie, wie schon oben (16.) allgemein angegeben, so, dass sie durch a_1 geht. Suchen wir nun die verlangte Spur eins, d. h. den Schnitt der Ebene abc mit der $\mathfrak{T}_2$ oder mit der $\mathfrak{E}(\mathfrak{R}_1)$, d. h. mit der Ebene, deren erster Riss $\mathfrak{R}_1$ ist, so müssen wir nach der vorigen Nummer suchen, wo zwei Gerade der $\mathfrak{E}(abc)$ die $\mathfrak{E}(\mathfrak{R}_1)$ schneiden. Man wird aber leicht gewahr werden, dass die Gerade ac die $\mathfrak{E}(\mathfrak{R}_1)$ in dem $\mathfrak{P}(a)$ schneidet, den wir schon haben (in demselben Punkte schneidet auch die $\mathfrak{G}(ab)$ die $\mathfrak{E}(\mathfrak{R}_1)$); wir werden also noch suchen, wo die $\mathfrak{G}(bc)$ die $\mathfrak{E}(\mathfrak{R}_1)$ schneidet, und dies geschieht in dem Punkte d. Verbinden wir daher a mit d durch die $\mathfrak{G}(A)$, so ist dies die verlangte Spur zwei. In ganz ähnlicher Art erhalten wir als erste Spur der Ebene abc die Gerade B. Da aber die beiden Geraden A, B, weil sie beide in derselben Ebene liegen, sich schneiden müssen, so müssen die Punkte f_1 (in welchem sich A_1 und B_1 treffen) und f_2 (wo A_2 und B_2 zusammenstossen) senkrecht über einander liegen. Zugleich sieht man, dass der Punkt f, in welchem sich die Spuren der $\mathfrak{E}(abc)$ schneiden, in der Kante liegt, wie dies oben (25.) bereits nachgewiesen wurde.

Anm. Würden wir die beiden umgeklappten Tafeln so verschieben, dass $\mathfrak{R}_1$ auf $\mathfrak{R}_2$ (und auch alle $\mathfrak{R}\mathfrak{R}_1$ auf die ihnen ent-

sprechenden $\mathfrak{K}\mathfrak{R}_2$) fielen, so würde (wie in Fig. 15 a) A_1 und B_2 in $\mathfrak{K}$, sowie f_1 und f_2 in f zusammenfallen, und es kommen dann A_2, B_1 und $\mathfrak{K}$ in einem Punkte f zusammen. Dieser Punkt f kann aber auch in unendliche Ferne fallen, in welchem Falle sowohl A als B $\parallel \mathfrak{K}$ werden.

Fig. 16. 44. Aufg. Es sind gegeben eine $\mathfrak{G}(a_1)$ und eine $\mathfrak{E}(bcd)$; gesucht ihr Schnittpunkt.

Aufl. Da der gesuchte Punkt seinen $\mathfrak{R}_1$ in a_1 haben muss (28.), so ist die vorliegende Aufgabe übereinstimmend mit der: einen $\mathfrak{P}(a)$ einer $\mathfrak{E}(bcd)$ zu suchen, dessen $\mathfrak{R}_1$ ein gegebener $\mathfrak{P}(a_1)$ ist.

Wäre nun ein beliebiger Punkt der $\mathfrak{E}(bcd)$ verlangt, so würden wir in der Ebene eine beliebige Gerade und in dieser einen beliebigen Punkt annehmen; da aber der $\mathfrak{R}_1$ des Punktes a gegeben ist, so muss auch die Gerade der Ebene, in welcher der $\mathfrak{P}(a)$ liegen soll, so gewählt werden, dass ihr $\mathfrak{R}_1$ durch a_1 geht. Wir werden demnach eine $\mathfrak{G}(A)$ der $\mathfrak{E}(bcd)$ aufsuchen, deren $\mathfrak{R}_1$ durch $\mathfrak{P}(a_1)$ geht. Haben wir die $\mathfrak{G}(A)$ gefunden (42.), so ist der $\mathfrak{P}(a)$, dessen $\mathfrak{R}_2$ in C_2 liegen muss, der gesuchte Punkt.

NB. Wir haben der Bequemlichkeit wegen C_1 so gewählt, dass es durch b_1 geht; dann ist die Aufsuchung von C_2, weil es durch b_2 gehen muss, einfacher.

Anm. Da in der $\mathfrak{G}(a_1)$ der $\mathfrak{P}(a)$ der einzige Punkt ist, den sie mit der $\mathfrak{E}(bcd)$ gemein hat, also jeder andere Punkt, der in a_1 seinen $\mathfrak{R}_1$ hat, nicht in der $\mathfrak{E}(bcd)$ liegen kann, so gibt uns die vorliegende Aufgabe ein Mittel an die Hand, zu untersuchen, ob ein $\mathfrak{P}(a)$ in einer Ebene (bcd) liegt. Man darf nur den Durchschnitt der $\mathfrak{G}(a_1)$ mit der $\mathfrak{E}(bcd)$ aufsuchen. Je nachdem der gefundene Schnittpunkt mit $\mathfrak{P}(a)$ zusammenfällt oder nicht, liegt der $\mathfrak{P}(a)$ in der $\mathfrak{E}(bcd)$ oder nicht.

Fig. 17. 45. Aufg. Es sind gegeben eine $\mathfrak{E}(AB)$ und eine $\mathfrak{G}(C)$; gesucht ihr Schnittpunkt.

Aufl. Sollte der gesuchte Punkt blos in der $\mathfrak{E}(AB)$ liegen, so würden wir in ihr eine beliebige Gerade D und in dieser einen beliebigen Punkt annehmen. Da aber der Punkt auch in der $\mathfrak{G}(C)$ liegen muss, so müssen die Geraden C und D diesen Punkt gemein haben, also in einer Ebene liegen, deren Durchschnitt mit der $\mathfrak{E}(AB)$ die $\mathfrak{G}(D)$ ist. Wir müssen demnach

durch die $\mathfrak{G}(C)$ eine Ebene legen, ihren Schnitt D mit der $\mathfrak{E}(AB)$ aufsuchen, und es ist dann der gesuchte Punkt der Durchschnitt der $\mathfrak{G}(C)$ mit der $\mathfrak{G}(D)$. Unter allen Ebenen aber, die die $\mathfrak{G}(C)$ enthalten, sind die einzigen, deren Schnitt mit der gegebenen $\mathfrak{E}(AB)$ wir bis jetzt finden gelernt haben (42.), diejenigen, welche zugleich auf einer Tafel senkrecht stehen, also die $\mathfrak{LE}_1$ oder die $\mathfrak{LE}_2$ der $\mathfrak{G}(C)$, d. i. die $\mathfrak{E}(C_1)$ oder die $\mathfrak{E}(C_2)$. Wir finden demnach den verlangten Punkt auf folgende Weise:

Man sucht (nach 42.) den Durchschnitt D der $\mathfrak{E}(AB)$ mit der $\mathfrak{E}(C_1)$, wobei $D_1 \mid C_1$; der Punkt a, nach welchem $\mathfrak{G}(C) \times \mathfrak{G}(D)$ (s. 39. und 31. 2.) ist der gesuchte Punkt.

Anm. Fiele auch D_2 mit C_2 zusammen, so wäre die $\mathfrak{G}(D) \mid \mathfrak{G}(C)$, also läge $\mathfrak{G}(C)$ in der $\mathfrak{E}(AB)$; wäre $D_2 \parallel C_2$, so wäre auch $\mathfrak{G}(C) \parallel \mathfrak{G}(D)$ (32.), und daher auch (Anh. 30.) $\mathfrak{G}(C) \parallel \mathfrak{E}(AB)$. Man sieht daher, dass uns diese Aufgabe zugleich ein Mittel an die Hand gibt, zu erkennen, ob eine $\mathfrak{G}(C) \mid$, $\parallel$ oder $\times \mathfrak{E}(AB)$. Denn um dies zu erfahren, darf man nur den Schnitt der $\mathfrak{G}(C)$ mit der $\mathfrak{E}(AB)$ aufsuchen.

46. Aufg. Es sind gegeben eine $\mathfrak{E}(AB)$ und eine $\mathfrak{E}(CD)$; Fig. 18. gesucht ihre Schnittlinie.

Aufl. Liegt ein Punkt in beiden Ebenen, oder in der einen Ebene und in einer Geraden der andern Ebene, so gehört er der gesuchten Schnittlinie an. Suchen wir daher (nach 45.) den $\mathfrak{P}(a)$, in welchem die $\mathfrak{E}(CD)$ von der $\mathfrak{G}(A)$ geschnitten wird, so ist er ein Punkt der gesuchten Schnittlinie. Suchen wir ferner den $\mathfrak{P}(b)$, in welchem die $\mathfrak{E}(CD)$ von der $\mathfrak{G}(B)$ getroffen wird, so haben wir einen zweiten Punkt der gesuchten Linie. Diese ist daher die $\mathfrak{G}(E)$, welche durch die Punkte a, b geht.

Anm. 1. Ist die $\mathfrak{G}(A) \parallel \mathfrak{E}(CD)$ (s. 45. Anm.), so kann $\mathfrak{E}(AB) \parallel \mathfrak{E}(CD)$ sein, oder nicht. Um dies zu erfahren, muss man in der $\mathfrak{E}(AB)$ eine zweite Gerade haben, welche die $\mathfrak{G}(A)$ schneidet, und den $\mathfrak{P}(b)$ suchen, in welchem diese zweite Gerade die $\mathfrak{E}(CD)$ trifft. Findet man einen solchen Punkt, so schneidet $\mathfrak{E}(AB)$ die $\mathfrak{E}(CD)$ nach einer Geraden, die $\mid \mathfrak{P}(b)$ und $\parallel \mathfrak{G}(A)$. Findet man keinen $\mathfrak{P}(b)$, d. h. ist auch die zweite Gerade der $\mathfrak{E}(AB)$ parallel zur $\mathfrak{E}(CD)$, so ist, weil A und B sich schneiden, $\mathfrak{E}(AB) \parallel \mathfrak{E}(CD)$.

Würde $\mathfrak{G}(A) \mid \mathfrak{E}(CD)$, so ist entweder die $\mathfrak{G}(A)$ selbst der Durchschnitt der Ebenen, oder sie fallen zusammen, in welchem Falle auch $\mathfrak{G}(B) \mid \mathfrak{E}(CD)$ wäre, was man (s. 45. Anm.) untersuchen kann.

Man sieht daher, dass uns diese Aufgabe auch untersuchen lehrt, ob zwei gegebene schiefe Ebenen sich schneiden, oder parallel sind, oder zusammenfallen. Denn dies stellt sich heraus, wenn man den Schnitt der beiden Ebenen aufsucht.

Anm. 2. Sind von den Ebenen die ersten Spuren gegeben, so ist der Schnitt von diesen schon ein Punkt ihrer Schnittlinie. Dasselbe gilt von ihren zweiten Spuren. Sind daher (Fig. 25.) $\mathfrak{R}$ die Kante, C_1 und D_2 die Spuren der einen, E_1 und F_2 die Spuren der anderen Ebene, so sind die Punkte a und b Punkte der Schnittlinie beider Ebenen und daher $\mathfrak{G}(ab)$ die verlangte Schnittlinie. Man sieht, dass in diesem Falle die Zeichnung sehr einfach wird.

47. Aufg. Es sind gegeben drei Ebenen, gesucht der Punkt, den sie gemein haben.

Aufl. Da dieser Punkt in der ersten und zweiten Ebene liegt, so gehört er auch ihrem Durchschnitt an, und da er auch in der dritten Ebene sich befindet, so ist er der Punkt, in welchem die dritte Ebene von dem Durchschnitte der ersten und zweiten getroffen wird. Man wird demnach zuerst (nach 47. oder 46.) den Schnitt der ersten und zweiten Ebene aufsuchen, sodann (nach 40., 44. oder 45.), wo diese Schnittlinie die dritte Ebene schneidet.

Fig. 19.

48. Aufg. Es sind gegeben zwei Gerade; gesucht eine Ebene, welche die eine Gerade enthält und mit der andern parallel ist.

Aufl. Ist eine der beiden Geraden ein Loth, wie die $\mathfrak{G}(a_1)$ (Fig. a), so ist auch die gesuchte Ebene eine $\mathfrak{LE}$. Soll nun diese durch die $\mathfrak{G}(A)$ gehen und mit $\mathfrak{G}(a_1)$ parallel sein, so ist A_1 ihr $\mathfrak{R}_1$ und die $\mathfrak{E}(A_1)$ die gesuchte Ebene. Soll sie durch $\mathfrak{G}(a_1)$ gehen, und $\parallel \mathfrak{G}(A)$ sein, so muss ihr $\mathfrak{R}_1$ durch den $\mathfrak{P}(a_1)$ gehen und $\parallel \mathfrak{G}(A_1)$ sein (nach 33. Satz 1. und 2.). Es ist demnach in diesem Falle $\mathfrak{E}(B_1)$ die gesuchte Ebene.

Sind aber beide Gerade schief, wie $\mathfrak{G}(A)$ und $\mathfrak{G}(B)$ (Fig. b), und soll die Ebene $\mid \mathfrak{G}(A)$ und $\parallel \mathfrak{G}(B)$ sein, so muss die gesuchte Ebene, ausser der $\mathfrak{G}(A)$, jede $\mathfrak{G}(C)$ enthalten, die durch einen $\mathfrak{P}(a)$ dieser Ebene geht und $\parallel \mathfrak{G}(B)$ ist. (38. I.) Nimmt man also in der Ebene, oder, was ebensoviel ist, in der $\mathfrak{G}(A)$ derselben einen $\mathfrak{P}(a)$ an, und legt dadurch die $\mathfrak{G}(C) \parallel \mathfrak{G}(B)$, so ist die $\mathfrak{E}(AC)$ die gesuchte Ebene.

Es trägt hiebei zur Vereinfachung der Zeichnung bei, wenn man, wie wir es gethan, den $\mathfrak{P}(a)$ so wählt, dass $\mathfrak{G}(B_1) \mid \mathfrak{G}(C_1)$.

Anm. Es könnte sich treffen, dass $\mathfrak{G}(C) \mid \mathfrak{G}(A)$, in welchem Falle $\mathfrak{G}(A) \parallel \mathfrak{G}(B)$ sein müsste. Wir hätten dann von der gesuchten Ebene blos eine Gerade, und es würde dann die Aufgabe unbestimmt.

NB. Wir haben die vorliegende Aufgabe auch für die Fälle gelöst, wo die gesuchte Ebene eine $\mathfrak{LE}$ wird; wir werden von nun an in der Regel blos den allgemeinsten Fall einer Aufgabe durchmachen, und die besondern Fälle dem Schüler selbst überlassen.

49. Aufg. Es sind gegeben eine $\mathfrak{G}(A)$ und eine $\mathfrak{E}(BC)$; gesucht eine Ebene, die durch $\mathfrak{G}(A)$ geht und $\perp \mathfrak{E}(BC)$. Fig. 20.

Aufl. Wir brauchen hier wieder blos mit Hülfe der zweiten Bedingung eine Gerade zu suchen, die der verlangten Ebene angehört. Eine solche ist aber jede $\mathfrak{G}(D)$, die durch einen $\mathfrak{P}(a)$ der gesuchten Ebene geht und $\perp \mathfrak{E}(BC)$. Wir müssen demnach in der gesuchten Ebene, also in der ihr gehörigen $\mathfrak{G}(A)$ einen beliebigen $\mathfrak{P}(a)$ annehmen und durch ihn eine $\mathfrak{G}(D)$ legen, welche $\perp \mathfrak{E}(BC)$, d. h. deren Risse D_1, D_2 zu den Spuren E_1, F_2 (43.) der $\mathfrak{E}(BC)$ senkrecht stehen (35.), und es ist dann $\mathfrak{E}(AD)$ die gesuchte Ebene.

Anm. Fiele hier wieder $\mathfrak{G}(D)$ zusammen mit der $\mathfrak{G}(A)$, so müsste $\mathfrak{G}(A) \perp \mathfrak{E}(BC)$ sein; wir hätten dann zur Bestimmung unserer Ebene nur eine einzige Gerade, und die Ebene wäre unbestimmt.

50. Aufg. Es ist gegeben ein $\mathfrak{P}(a)$ und eine $\mathfrak{G}(A)$; gesucht eine Ebene $\mathfrak{E}$ $\mathfrak{P}(a)$ und $\perp \mathfrak{G}(A)$. Fig. 21.

Aufl. Wir legen durch $\mathfrak{P}(a)$ eine Gerade, welche $\perp \mathfrak{G}(A)$ ist (s. 38. V). Es giebt aber unendlich viele solche Gerade (die zusammen die gesuchte Ebene bilden) von denen (s. 36.)

sich ohne Hilfsoperationen die $\mathfrak{G}(B)$ unmittelbar zeichnen lässt, wenn $B_1 \parallel \mathfrak{R}_1$ und $B_2 \perp A_2$ gewählt wird; ferner eine zweite Gerade C ($C_2 \parallel \mathfrak{R}_2$, $C_1 \perp A_1$). Die beiden Geraden bestimmen die Ebene, so dass die gesuchte Ebene die $\mathfrak{E}(BC)$ ist.

NB. Statt die $\mathfrak{G}(C)$ durch den $\mathfrak{P}(a)$ zu legen, hätten wir auch in der $\mathfrak{G}(B)$ einen anderen Punkt wählen und durch ihn die $\mathfrak{G}(C)$ legen können.

Anm. 1. Betrachtet man B_1 als $\mathfrak{R}_1$ und B_2 als $\mathfrak{R}_2$, so sind B und C die Spuren der Ebene.

Anm. 2. Ist die gegebene $\mathfrak{G}(A) \parallel \mathfrak{T}_2$ (wie in Fig. 21. a), so führt diese besondere Gerade (s. 38. c) uns darauf, dass die gesuchte Ebene ein $\mathfrak{LE}_2$ ist, und demnach zu ihrer Bestimmung blos ihr $\mathfrak{R}_2$ zu suchen ist. Dieser muss aber durch a_2 gehen und $\perp A_2$ sein. Ziehen wir durch a_2 die Gerade $B_2 \perp A_2$, so ist die $\mathfrak{E}(B_2)$ die verlangte Ebene.

51. Wir lassen hier noch einige Aufgaben, in denen das Gesuchte eine Ebene ist, folgen, deren weitere Ausführung wir dem Schüler überlassen wollen.

1) Es sind gegeben ein $\mathfrak{P}(a)$ und eine $\mathfrak{E}(AB)$; gesucht eine mit dieser parallele Ebene, die durch den Punkt geht.

Man legt durch den $\mathfrak{P}(a)$ eine $\mathfrak{G}(C) \parallel \mathfrak{G}(A)$ und durch einen Punkt der $\mathfrak{G}(C)$, z. B. durch $\mathfrak{P}(a)$ selbst, eine $\mathfrak{G}(D) \parallel \mathfrak{G}(B)$, vorausgesetzt, dass $\mathfrak{G}(A)$ und $\mathfrak{G}(B)$ sich schneiden. Wäre $\mathfrak{G}(A) \parallel \mathfrak{G}(B)$, so müsste man in $\mathfrak{E}(AB)$ eine $\mathfrak{G}(E)$ annehmen, die die $\mathfrak{G}(A)$ und $\mathfrak{G}(B)$ schneidet, und $\mathfrak{G}(D) \parallel \mathfrak{G}(E)$ sein lassen. Dann ist $\mathfrak{E}(CD)$ die gesuchte Ebene.

2) Es sind gegeben eine $\mathfrak{G}(A)$ und eine $\mathfrak{G}(B)$, die nicht parallel sind, und ein $\mathfrak{P}(a)$; gesucht eine Ebene, die $\mid \mathfrak{P}(a)$, $\parallel \mathfrak{G}(A)$ und $\parallel \mathfrak{G}(B)$.

Die gesuchte Ebene geht durch die $\mathfrak{G}(C)$, die $\mid \mathfrak{P}(a)$ und $\parallel \mathfrak{G}(A)$, und durch $\mathfrak{G}(D)$, die $\mid \mathfrak{P}(a)$ und $\parallel \mathfrak{G}(B)$. Wäre $\mathfrak{G}(A) \parallel \mathfrak{G}(B)$, so erhielte man nur eine Gerade der gesuchten Ebene.

3) Es sind zwei Ebenen und ein Punkt gegeben; gesucht eine Ebene, die durch den Punkt geht, und auf den gegebenen Ebenen senkrecht steht.

Die gesuchte Ebene muss zwei Gerade enthalten, welche durch den Punkt gehen und beziehungsweise zu den Ebenen

senkrecht stehen; oder sie muss durch den Punkt gehen und senkrecht stehen auf der Geraden, nach der sich die Ebenen schneiden. (Wie müssen die gegebenen Ebenen gegeneinander liegen, wenn die gesuchte Ebene unbestimmt werden soll?)

4) Es sind gegeben ein Punkt, eine Gerade und eine Ebene; gesucht eine Ebene, die durch den Punkt geht, mit der Geraden parallel und zur Ebene senkrecht ist.

Die gesuchte Ebene muss zwei Gerade enthalten, die durch den Punkt gehen, und beziehungsweise parallel zur gegebenen Geraden und senkrecht zur gegebenen Ebene sind. (Wie müssen die gegebene Gerade und Ebene gegeneinander liegen, wenn die Aufgabe unbestimmt ist?)

Anm. Wäre in den Aufgaben der vorliegenden Nr. der $\mathfrak{P}(a)$ nicht gegeben, so würden wir ihn beliebig annehmen und dann die Ebene nach dem angebenen Verfahren suchen. Die so gefundene Ebene ist aber nicht die einzige entsprechende, da wir ja den $\mathfrak{P}(a)$ auch anders hätten wählen können, sondern es giebt unzählige Ebenen, die alle $\parallel$ laufen, also sich in einer unendlich fernen Geraden schneiden, oder, wie wir auch sagen können, die unendlich ferne Gerade gemein haben. Die Aufgabe ist also unbestimmt.

Da wir von parallelen Ebenen sagen wollen, sie haben gleiche **Stellung**, so sieht man, dass durch die Aufgaben der vorliegenden Nummer, wenn der $\mathfrak{P}(a)$ nicht gegeben ist, die Stellung einer Ebene gefunden werden kann.

52. Wir kommen nun zu den Aufgaben, in welchen das Gesuchte eine Gerade ist. Die Aufgabe, eine Gerade zu finden. die zwei Ebenen angehört, haben wir schon oben (41., 46.) gelöst. Die Aufgaben, eine Gerade zu finden, die durch einen Punkt geht, und entweder mit einer Geraden parallel oder zu einer Ebene senkrecht steht, gehen so einfach aus den Sätzen in 28, 31 und 35 hervor, dass wir sie nicht besonders durchführen zu müssen glaubten, und daher schon bisher als bekannt voraussetzten. Bei den übrigen Aufgaben, in denen eine Gerade gesucht wird, ist der Weg, den man einschlägt, der, dass man sich, wenn möglich, zuerst eine Gerade zu verschaffen sucht, mit der die gesuchte parallel ist. Man kann aber eine solche Gerade finden, wenn man (38. IX.) zwei

Ebenen hat, oder aus den Bedingungen bekommen kann (s. 38. VI. und X.), zu denen die gesuchte Gerade parallel ist; (wir müssen hier wiederholt darauf aufmerksam machen, dass eine Gerade, die in einer Ebene liegt, mit ihr auch parallel ist). Man wird demnach an den gegebenen Bedingungen gleich sehen, ob man eine Parallele zur gesuchten Geraden erhalten kann, oder nicht. In letzterem Falle muss man durch die gegebenen Bedingungen zwei Punkte der Geraden zu erhalten suchen, oder zwei Ebenen, in denen sie liegt. Zur Auffindung eines Punktes der Geraden dienen (nach 38. X.) die beiden Bedingungen $\times$ G(A), $|$ E(BC). Sind nun diese beiden Bedingungen gegeben, so ist der Schnitt von G(A) mit E(BC) ein Punkt der gesuchten Geraden. Ist aber die Bedingung $|$ E(BC) nicht gegeben, wohl aber die $\times$ G(A), so müssen wir uns aus den übrigen (ausser der letztgenannten) Bedingungen eine Ebene verschaffen, in der die Gerade liegt, deren Durchschnitt also mit A den verlangten Punkt liefert.

53. Aufg. Es sind gegeben zwei Gerade A, B und eine Ebene; gesucht eine Gerade C, die in der Ebene liegt, und beide Gerade A, B schneidet.

Aufl. Da man hier nur eine einzige Ebene hat, zu der die G(C) parallel ist, so kann man unmittelbar keine Gerade finden, die $\|$ G(C) ist. Man wird daher zwei Punkte der Geraden C zu erhalten suchen. Diese sind aber leicht zu erhalten; denn es müssen (nach 38. X.) die Punkte a, b, in welchen die Ebene von den Geraden A, B geschnitten wird, in der G(C) liegen. Um diese daher zu finden, sucht man (nach 45.) die Punkte a, b, in welchen die Geraden A, B die Ebene schneiden, so ist die G(ab) die gesuchte Linie.

Anm. Ist die G(A) parallel zur Ebene, so ist die G(C) unmöglich; liegt die G(A) in der Ebene, während diese von der G(B) im P(b) geschnitten wird, so erfüllt jede Gerade, die den P(b) mit einem Punkte der G(A) verbindet, die verlangten Bedingungen. Liegen G(A) und G(B) in der Ebene, so werden sie von jeder Geraden der Ebene geschnitten, die nicht mit einer von ihnen parallel ist.

54. Aufg. Es sind gegeben eine $\mathfrak{G}(A)$, eine $\mathfrak{G}(B)$ und ein $\mathfrak{P}(a)$, der in keiner dieser Geraden liegt; gesucht eine Gerade, die $\mid \mathfrak{P}(a)$, $\times \mathfrak{G}(A)$ und $\times \mathfrak{G}(B)$. Fig. 22.

Aufl. Man sieht hier leicht, dass sich aus den gegebenen Bedingungen die Richtung der Geraden nicht finden lässt, wir daher zwei Punkte der Geraden brauchen, und, da ein Punkt gegeben ist, ein Punkt gesucht werden muss. Wir müssen uns daher (nach 52.), da die Bedingung $\times \mathfrak{G}(A)$ gegeben ist, aus den übrigen Bedingungen $[\mid \mathfrak{P}(a), \times \mathfrak{G}(B)]$ eine Ebene verschaffen, in der die Gerade liegt. Eine solche Ebene ist aber offenbar die $\mathfrak{E}(Ba)$. Wir haben also die Bedingungen $\times \mathfrak{G}(A)$, $\mid \mathfrak{E}(Ba)$, woraus wir durch den Schnittpunkt b der $\mathfrak{G}(A)$ mit der $\mathfrak{E}(Ba)$ einen Punkt b der gesuchten Geraden, und mit ihm die $\mathfrak{G}(ab)$ erhalten.

Was die Ausführung der Zeichnung betrifft, so ist der Gang, den wir zu nehmen haben, folgender:

Wir nehmen in der $\mathfrak{E}(Ba)$ noch eine $\mathfrak{G}(C)$ an (welche $\mid \mathfrak{P}(a)$ und $\parallel$ oder $\times \mathfrak{G}(B)$); suchen wir nun (nach 45.) *) den $\mathfrak{P}(b)$, in welchen die $\mathfrak{E}(BC) \times \mathfrak{G}(A)$, so ist $\mathfrak{G}(D)$, welche $\mid \mathfrak{P}(a)$ und $\mid \mathfrak{P}(b)$, die gesuchte Gerade.

Da diese Gerade $\mid \mathfrak{P}(a)$ und $\mid \mathfrak{P}(b)$, der in der $\mathfrak{G}(A)$ liegt, so erfüllt sie offenbar die Bedingungen, dass sie $\mid \mathfrak{P}(a)$ und $\times \mathfrak{G}(A)$; sie muss aber auch $\times \mathfrak{G}(B)$, wovon wir uns unmittelbar in der Zeichnung überzeugen können (31. Satz.) Sollte aber $\mathfrak{G}(D) \parallel \mathfrak{G}(B)$ sein, so wäre die Aufgabe unmöglich. In unserer Figur schneiden sich in der That die $\mathfrak{G}(D)$ und die $\mathfrak{G}(B)$ nach $\mathfrak{P}(c)$.

Anm. Bei der Aufsuchung des $\mathfrak{P}(b)$ können uns auch die Fälle (45. Anm.) vorkommen, dass die $\mathfrak{G}(A) \parallel$ oder $\mid \mathfrak{E}(BC)$. Im ersten Falle giebt es keinen $\mathfrak{P}(b)$, also auch keine $\mathfrak{G}(D)$; die Aufgabe ist also unmöglich; im zweiten Falle kann jeder Punkt der $\mathfrak{G}(A)$ den $\mathfrak{P}(b)$ vorstellen, also giebt es unendlich viele $\mathfrak{G}(D)$, und die Aufgabe ist unbestimmt.

---

*) Da die Aufgabe in Num. 45., so wie hier, auch in den folgenden Aufgaben gebraucht wird, so machen wir den Schüler darauf aufmerksam, sich diese Aufgabe recht geläufig zu machen.

Fig. 23. 55. Aufg. Es sind gegeben eine $\mathfrak{G}(A)$ und ein $\mathfrak{P}(a)$; gesucht eine Gerade, die $\mid \mathfrak{P}(a)$, $\times \mathfrak{G}(A)$ und $\perp \mathfrak{G}(A)$.

Aufl. Da die $\mathfrak{G}(A)$ von der gesuchten Geraden geschnitten wird, so brauchen wir nur noch eine Ebene, die sie enthält, um einen Punkt derselben finden zu können (38. X.) Eine solche Ebene geht aber aus der Bedingung hervor, dass die Gerade $\perp \mathfrak{G}(A)$ und $\mid \mathfrak{P}(a)$; denn sie muss desshalb (38. VI.) in einer Ebene liegen, die $\perp \mathfrak{G}(A)$ und $\mid \mathfrak{P}(a)$. Suchen wir daher (nach 50.) eine $\mathfrak{E}(BC)$, die $\mid \mathfrak{P}(a)$ und $\perp \mathfrak{G}(A)$, so ist der $\mathfrak{P}(b)$, in welchem $\mathfrak{G}(A) \times \mathfrak{E}(BC)$, ein Punkt der gesuchten Geraden, und diese ist daher $\mathfrak{G}(D)$, welche $\mid \mathfrak{P}(a)$ und $\mid \mathfrak{P}(b)$.

Anm. Fällt $\mathfrak{P}(b)$ zusammen mit $\mathfrak{P}(a)$, welcher Fall eintreten muss, wenn der $\mathfrak{P}(a) \mid \mathfrak{G}(A)$, so erhält man durch das eben angegebene Verfahren keinen neuen Punkt der $\mathfrak{G}(D)$, und diese ist unbestimmt (muss aber natürlich in der $\mathfrak{E}(BC)$ liegen und $\mid \mathfrak{P}(a)$).

Fig. 24. 56. Aufg. Eine Gerade zu finden, die zwei gegebene Gerade A, B schneidet und mit einer dritten Geraden parallel ist.

Aufl. 1) Ist die dritte Gerade eine Senkrechte zur $\mathfrak{T}_1$, z. B. die $\mathfrak{G}(a_1)$, so ist auch die gesuchte Gerade ein $\mathfrak{L}_1$ und ihr $\mathfrak{R}_1$ ein Punkt. Dieser Punkt muss aber offenbar in A_1 und B_1 liegen, weil die gesuchte Gerade sowohl A als B schneiden soll. Demnach ist der Punkt c_1, in welchem A_1 und B_1 sich schneiden, der $\mathfrak{R}_1$ der gesuchten Geraden; diese ist also $\mathfrak{G}(c_1)$.

2) Ist die dritte Gerade die $\mathfrak{G}(C)$, so ist die Richtung der gesuchten Geraden gegeben; wir brauchen daher nur noch einen Punkt von dieser. Wegen der Bedingung, $\times \mathfrak{G}(A)$ dürfen wir uns nur wieder eine Ebene verschaffen, in der die Gerade liegen muss. Eine solche Ebene muss aber $\parallel \mathfrak{G}(C)$ sein, und, wegen $\times \mathfrak{G}(B)$, eine $\mathfrak{E}(BD)$ vorstellen, die $\mid \mathfrak{G}(B)$ und $\parallel \mathfrak{G}(C)$ (s. 48). Sucht man nun den $\mathfrak{P}(a)$, in welchem $\mathfrak{G}(A) \times \mathfrak{E}(BD)$, so ist er ein Punkt der verlangten Geraden. Diese kann daher keine andere sein, als die $\mathfrak{G}(E)$, welche $\mid \mathfrak{P}(a)$ und $\parallel \mathfrak{G}(C)$.

In der That erfüllt auch die $\mathfrak{G}(E)$ im Allgemeinen die verlangten Bedingungen; denn da wir sie durch den in der $\mathfrak{G}(A)$ liegenden $\mathfrak{P}(a)$ und $\parallel \mathfrak{G}(C)$ gelegt haben, so ist nur noch nachzusehen, ob $\mathfrak{G}(E) \times \mathfrak{G}(B)$. Dies wird aber im Allgemeinen der

Fall sein (in unserer Figur schneiden sich diese Linien im $\mathfrak{P}(b)$), da $\mathfrak{G}(E)$ und $\mathfrak{G}(B)$ in der $\mathfrak{E}(BD)$ liegen. Es könnte aber auch ausnahmsweise $\mathfrak{G}(E) \parallel \mathfrak{G}(B)$ sein, welcher Fall eintritt, wenn $\mathfrak{G}(C) \parallel \mathfrak{G}(B)$.

Anm. Bei der Aufsuchung der $\mathfrak{E}(BD)$ könnte es sein, dass diese unbestimmt würde (48. Anm.), wenn $\mathfrak{G}(B) \parallel \mathfrak{G}(C)$ wäre; aber in diesem Falle müsste jede Gerade, die $\parallel \mathfrak{G}(C)$ ist, auch $\parallel \mathfrak{G}(B)$ und nicht $\times \mathfrak{G}(B)$; es wäre also dann die Aufgabe unmöglich.

Ferner bei der Aufsuchung des $\mathfrak{P}(a)$ könnte (45. Anm.) $\mathfrak{G}(A) \parallel \mathfrak{E}(BD)$ sein, in welchem Falle kein $\mathfrak{P}(a)$, also auch kein $\mathfrak{G}(E)$ vorhanden, also die Aufgabe unmöglich wäre. Oder es könnte $\mathfrak{G}(A) \mid \mathfrak{E}(BD)$, in welchem Falle die $\mathfrak{G}(A)$ unzählige Punkte mit der $\mathfrak{E}(BD)$ gemein hätte, und daher auch unzählige $\mathfrak{G}(E)$ möglich wären, wenn diese $\times \mathfrak{G}(B)$, oder gar keine, wenn sie $\parallel \mathfrak{G}(B)$.

57. Aufg. Es sind gegeben ein $\mathfrak{P}(a)$, eine $\mathfrak{G}(A)$ und eine $\mathfrak{G}(B)$; gesucht eine Gerade, die $\mid \mathfrak{P}(a)$, $\perp \mathfrak{G}(A)$ und $\perp \mathfrak{G}(B)$. Fig. 25.

Aufl. Hier kann man zwei Ebenen erhalten, die parallel zur gesuchten Geraden sind, deren Schnitt also parallel zur gesuchten Geraden ist, nemlich zwei Ebenen, die auf den Geraden A, B beziehungsweise senkrecht stehen. Nehmen wir aber, was hier leicht geht, diese Ebenen so an, dass sie beide $\mid \mathfrak{P}(a)$, so ist ihr Schnitt die gesuchte Gerade selbst. Nehmen wir daher die $\mathfrak{K}$ so an, dass a_2 in ihr (und daher $\mathfrak{P}(a) \mid \mathfrak{T}_1$) liegt, so sind C_1, D_2 ($C_1 \perp A_1$ und $D_2 \perp A_2$) die Spuren einer auf A senkrechten, und in ähnlicher Art E_1, F_2 die Spuren einer auf B senkrechten Ebene. Die beiden Ebenen schneiden sich in dem gegebenen Punkt a, ferner in dem $\mathfrak{P}(b)$, den ihre zweiten Spuren gemein haben; also ist die $\mathfrak{G}(ab)$ die verlangte.

Anm. Die beiden durch den $\mathfrak{P}(a)$ gelegten Ebenen werden zusammenfallen, wenn $\mathfrak{G}(A) \parallel \mathfrak{G}(B)$; in diesem Falle haben wir also blos eine Ebene, in der die gesuchte Gerade liegen muss, und diese ist unbestimmt.

NB. Wenn wir in unserer Zeichnung nur eine Kante, nemlich $\mathfrak{K}$, angenommen haben, während wir aus den früher (13.) angegebenen Gründen gewöhnlich $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ annehmen, so liegt der Grund einfach darin, dass hier die $\mathfrak{K}$ blos vorüber-

gehend benützt wird, und nach Lösung der Aufgaben nebst den Hilfslinien C_1, D_2, E_1, F_2 weggelöscht werden kann.

58. Wir haben nun die Lösung so vieler Aufgaben, in denen das Gesuchte eine Gerade ist, durchgenommen, dass wir glauben, der Schüler werde die übrigen Aufgaben mit Hülfe der allgemeinen Andeutungen, die wir oben (52.) gegeben haben, lösen können. Gleichwohl wollen wir ihn bei der Lösung der folgenden Aufgaben, deren Durchführung wir ihm überlassen, noch ein wenig unter die Arme greifen.

1) Es sind gegeben ein $\mathfrak{P}(a)$ und zwei Ebenen; gesucht eine mit diesen parallele Gerade, die $\mid \mathfrak{P}(a)$.

Die gesuchte Gerade muss zum Schnitt der Ebenen parallel sein und $\mid \mathfrak{P}(a)$, oder sie ist der Durchschnitt zweier Ebenen, die beide $\mid \mathfrak{P}(a)$ und von denen jede zu einer anderen der gegebenen Ebenen parallel ist.

2) Gegeben: $\mathfrak{P}(a)$, $\mathfrak{G}(A)$ und $\mathfrak{E}(BC)$; gesucht: $\mathfrak{G}(D) \mid \mathfrak{P}(a)$, $\perp \mathfrak{G}(A)$ und $\parallel \mathfrak{E}(BC)$.

Die $\mathfrak{G}(D)$ muss $\mid \mathfrak{P}(a)$ und parallel zum Schnitt der $\mathfrak{E}(BC)$ mit einer zur $\mathfrak{G}(A)$ senkrechten Ebene sein.

3) Gegeben: $\mathfrak{E}(AB)$, $\mathfrak{G}(C)$ und $\mathfrak{G}(D)$; gesucht: $\mathfrak{G}(E)$ $\mid \mathfrak{E}(AB)$ $\times$ $\mathfrak{G}(C)$ und $\perp \mathfrak{G}(D)$.

Die $\mathfrak{G}(E)$ muss durch den $\mathfrak{P}(a)$ gehen, in welchen $\mathfrak{G}(C)$ $\times$ $\mathfrak{E}(AB)$. Ferner muss sie $\parallel \mathfrak{E}(AB)$ und $\perp \mathfrak{G}(D)$; also die Aufgabe 2.

4) Gegeben: $\mathfrak{G}(A)$ und $\mathfrak{G}(B)$; gesucht $\mathfrak{G}(C) \times \mathfrak{G}(A) \times \mathfrak{G}(B) \perp \mathfrak{G}(A) \perp \mathfrak{G}(B)$.

Die $\mathfrak{G}(C)$ muss zum Durchschnitt zweier auf $\mathfrak{G}(A)$ und $\mathfrak{G}(B)$ resp. senkrechten Ebenen parallel sein (s. 57.) Hat man daher den Durchschnitt dieser Ebenen, so ist noch die Aufgabe der Num. 56. zu lösen.

Schliesslich müssen wir noch bemerken, dass jede Aufgabe, in der sich unter den gegebenen Bedingungen die findet, dass von der gesuchten Geraden ein Riss, z. B. der $\mathfrak{R}_1$, gegeben ist, diese Bedingung (nach 18. Satz 2.) so viel heisst, als sie soll in der Ebene liegen, deren $\mathfrak{R}_1$ der $\mathfrak{R}_1$ der Geraden ist.

59. Wir beschliessen diesen §., indem wir noch zeigen, durch welche Operation man finden kann, ob zwei Gerade oder zwei Ebenen auf einander senkrecht stehen.

1) Soll $\mathfrak{G}(A) \perp \mathfrak{G}(B)$, so muss $\mathfrak{G}(A)$ parallel einer jeden Ebene sein, die $\perp \mathfrak{G}(B)$. Zeichnet man daher eine beliebige Ebene $\perp \mathfrak{G}$ B) (35.) und untersucht, (45. Anm.) ob die $\mathfrak{G}(A)$ parallel ist zu dieser Ebene, so erhält man den verlangten Aufschluss.

2) Sollen zwei Ebenen auf einander senkrecht stehen, so muss jede Senkrechte zur einen Ebene parallel sein zur andern. Zeichnet man daher eine Senkrechte zur einen Ebene, und sieht nach, ob sie parallel zur andern ist, so erfährt man, ob die Ebenen zu einander senkrecht sind.

§. 4.

Uebergang zu einem anderen Risssystem
(Projektionssystem).

60. Schon in den bisherigen Aufgaben hat man sich überzeugt, dass die Lösungen derselben sehr leicht zu finden sind, wenn die gegebenen Geraden oder Ebenen besondere (d. h. parallel oder senkrecht zu einer Tafel) sind. Dies wird sich in der Folge, wo auch Winkel und Entfernungen auftreten, noch viel glänzender herausstellen. Man wird sich bei den folgenden Aufgaben sehr häufig überzeugen, dass sich ihre Lösungen oft von selbst ergeben, wenn die gegebenen Geraden und Ebenen besondere sind, während es schwer fiele, dieselben Aufgaben für allgemeine Gerade und Ebenen zu lösen. Deshalb ist es vor Allem wichtig zu bemerken, dass, wenn von irgend welchen Geraden und Ebenen die gegenseitige Lage bestimmt ist, und wir dann zu ihrer graphischen Bestimmung, wie üblich, zwei Tafeln annehmen, diese stets so gewählt werden, dass möglichst viele der gegebenen Geraden und Ebenen zu **besonderen** werden, wobei es natürlich vorkommen wird, dass immer noch Gerade und Ebenen vorkommen, die keine besonderen sind.

Wird uns nun in Bezug auf eine allgemeine Gerade (oder Ebene) eine neue Aufgabe vorgelegt, deren Lösung wir in der allgemeinen Gestalt nicht finden können, so überlegen wir, ob wir nicht die Aufgabe zu lösen im Stande sind, wenn die Gerade (oder Ebene) parallel oder senkrecht zu einer Tafel wäre. Finden

wir nun für diesen besonderen Fall eine Auflösung der Aufgabe, so helfen wir uns zur allgemeinen Lösung damit, dass wir eine neue Tafel (dritte Tafel, $\mathfrak{T}_3$) zu Hilfe nehmen, welche gegen die gegebene Gerade (oder Ebene) so gestellt ist, wie wir es für wünschenswerth halten. Diese $\mathfrak{T}_3$ und die $\mathfrak{T}_1$ (oder $\mathfrak{T}_2$) zusammen betrachten wir als ein neues Tafelsystem, in welchem wir die gegebenen Dinge nach den früheren Regeln bestimmen, und mittelst dessen wir die Aufgabe (in welcher nun die Gerade (oder Ebene) eine besondere ist) lösen. Schliesslich gehen wir noch auf das alte Tafelsystem zurück, d. h. wir suchen von allen gefundenen Punkten die Risse im alten Tafelsystem. Wir haben also zu zeigen, wie man aus dem alten System (aus $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ bestehend) zum neuen ($\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_3$) übergeht, und umgekehrt. Hiebei ist aber zu unterscheiden, ob die beiden Tafeln des neuen Systems ($\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$) oder ($\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{T}_3$) auf einander senkrecht stehen, also ein rechtwinkeliges System bilden wie die $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$, oder nicht. Es ist wohl jetzt schon leicht zu vermuthen, dass der Uebergang zum neuen Systeme leichter vor sich geht, wenn das neue Tafelsystem rechtwinkelig ist, dass es demnach wünschenswerth erscheint, wenn $\mathfrak{T}_3 \perp \mathfrak{T}_1$ (oder $\perp \mathfrak{T}_2$) ist.

Untersuchen wir daher, in welchen Fällen wir Veranlassung zur Annahme einer $\mathfrak{T}_3$ haben, und wie diese in den verschiedenen Fällen von selbst zu stehen kommt, oder gestellt werden kann.

61. Wird uns eine Aufgabe vorgelegt, die wir nur lösen können, wenn eine darin vorkommende Gerade parallel zu einer Tafel ist, während die gegebene Gerade A zu keiner der beiden Tafeln ($\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$) parallel läuft, so nehmen wir eine $\mathfrak{T}_3$ zu Hilfe, die zur Geraden A parallel ist. In diesem Falle ist also $\mathfrak{T}_3 \parallel \mathfrak{G}(A)$. Ebenso wird es vorkommen, dass $\mathfrak{T}_3 \perp \mathfrak{E}(abc)$, $\mathfrak{T}_3 \perp \mathfrak{G}(A)$, $\mathfrak{T}_3 \parallel \mathfrak{E}(abc)$ ist *). Es giebt aber noch eine Veranlassung zur Annahme einer $\mathfrak{T}_3$, wenn nemlich in der Aufgabe eine Gerade vorkommt, die in einer zur $\mathfrak{K}$ senkrechten Ebene

---

*) Sollte $\mathfrak{T}_3 \parallel \mathfrak{G}(A) \parallel \mathfrak{G}(B)$ sein, so wäre $\mathfrak{T}_3 \parallel$ einer Ebene, deren Stellung durch die Geraden A und B bestimmt ist. Auf diese Art kann man sich überzeugen, dass die $\mathfrak{T}_3$ nur eine von den 4 obengenannten Bedingungen zu erfüllen hat.

liegt. In diesem Falle können wir manche der bisherigen Aufgaben nicht lösen, weil ja bekanntlich die Lage einer solchen Geraden gegen andere Dinge (z B. ob ein Punkt in ihr liegt oder nicht) aus der Zeichnung gewöhnlich nicht erkannt werden kann. Wir nehmen deshalb ein neues Tafelsystem ($\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_3$) so an, dass die neue Kante, d. i. der Schnitt der $\mathfrak{T}_3$ und $\mathfrak{T}_1$ nicht senkrecht zur Geraden ist. Zu dem Ende ist es aber offenbar vollkommen genügend, wenn die $\mathfrak{T}_3$ nicht parallel zur $\mathfrak{T}_2$ ist; ausserdem können wir sie stellen, wie wir wollen. Wir werden daher in diesem Falle $\mathfrak{T}_3 \perp \mathfrak{T}_1$ (oder $\perp \mathfrak{T}_2$) annehmen.

Betrachten wir nun noch die vorhingenannten vier Fälle für die Annahme der $\mathfrak{T}_3$, nemlich:

2) $\mathfrak{T}_3 \parallel \mathfrak{G}(A)$; 3) $\mathfrak{T}_3 \perp \mathfrak{E}(abc)$; 4) $\mathfrak{T}_3 \parallel \mathfrak{E}(abc)$; 5) $\mathfrak{T}_3 \perp \mathfrak{G}(A)$.

ad 2) Ist nichts weiter verlangt, als dass $\mathfrak{T}_3 \parallel \mathfrak{G}(A)$, so können wir die $\mathfrak{T}_3$ so legen, dass sie die $\mathfrak{G}(A)$ enthält, und sie noch um die Gerade drehen; wir können und werden daher in diesem Falle die $\mathfrak{T}_3$ stets so annehmen, dass sie die $\mathfrak{G}(A)$ enthält und $\perp \mathfrak{T}_1$ (oder $\perp \mathfrak{T}_2$) steht.

ad 3) Soll $\mathfrak{T}_3 \perp \mathfrak{E}(abc)$, also senkrecht auf einer Geraden der $\mathfrak{E}(abc)$ sein, so ist ihre Stellung noch nicht bestimmt, wir können daher noch die Bedingung hinzufügen, dass $\mathfrak{T}_3 \perp \mathfrak{T}_1$ (oder $\mathfrak{T}_2$); in diesem Falle ist $\mathfrak{T}_3 \perp \mathfrak{E}(abc)$ und $\perp \mathfrak{T}_1$ also senkrecht auf der Spur eins der $\mathfrak{E}(abc)$. Wir werden daher im vorliegenden Falle die $\mathfrak{T}_3$ stets senkrecht zur Spur eins (oder zwei) der $\mathfrak{E}(abc)$ annehmen, wodurch $\mathfrak{T}_3 \perp \mathfrak{T}_1$ (oder $\perp \mathfrak{T}_2$) wird.

ad 4) Soll $\mathfrak{T}_3 \parallel \mathfrak{E}(abc)$ sein, so können wir die $\mathfrak{T}_3$ nur parallel verschieben, und damit den Winkel nicht ändern, den sie mit $\mathfrak{T}_1$ (oder $\mathfrak{T}_2$) einschliesst. Ist daher zufällig $\mathfrak{E}(abc) \perp \mathfrak{T}_1$ (oder $\perp \mathfrak{T}_2$), so ist auch $\mathfrak{T}_3 \perp \mathfrak{T}_1$ (oder $\perp \mathfrak{T}_2$), ausserdem ist das System ($\mathfrak{T}_3$, $\mathfrak{T}_1$) ein schiefwinkeliges. Wir wollen aber festsetzen, dass wenn $\mathfrak{T}_3 \parallel \mathfrak{E}(abc)$ sein soll, wir stets $\mathfrak{T}_3 \mid \mathfrak{E}(abc)$ annehmen.

ad 5) Soll die $\mathfrak{T}_3 \perp \mathfrak{G}(A)$ sein, so ist dadurch wieder die Stellung der $\mathfrak{T}_3$ und damit ihr Winkel mit der $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ bestimmt. Es wird also im vorliegenden Falle $\mathfrak{T}_3$ in der Regel

nicht senkrecht zu $\mathfrak{T}_1$ oder $\mathfrak{T}_2$ sein. Ist aber zufällig $\mathfrak{G}(A) \parallel \mathfrak{T}_1$ (oder $\parallel \mathfrak{T}_2$), so ist auch $\mathfrak{T}_3 \perp \mathfrak{T}_1$ (oder $\perp \mathfrak{T}_2$).

Man sieht demnach, dass unter den oben angeführten fünf Fällen der Annahme einer $\mathfrak{T}_3$ sich drei befinden, in denen wir stets $\mathfrak{T}_3 \perp \mathfrak{T}_1$ (oder $\perp \mathfrak{T}_2$) annehmen können, und daher annehmen werden; dass aber in den übrigen zwei Fällen im Allgemeinen $\mathfrak{T}_3$ nicht $\perp \mathfrak{T}_1$ oder $\mathfrak{T}_2$ ist, wobei ausnahmsweise auch hier vorkommen kann, dass $\mathfrak{T}_3 \perp \mathfrak{T}_1$ (oder $\perp \mathfrak{T}_2$).

Wir wollen nun zeigen, wie in den beiden Fällen (wo $\mathfrak{T}_3$ senkrecht oder schief gegen $\mathfrak{T}_1$ steht) bei dem Uebergange vom alten System in's neue, und umgekehrt, verfahren wird.

62. Ist $\mathfrak{T}_3 \perp \mathfrak{T}_1$, so nimmt man gleich die $\mathfrak{T}_1$ als die zweite Tafel des neuen (also rechtwinkigen) Systems an, und da von den gegebenen Punkten die $\mathfrak{R}_1$ und (weil die $\mathfrak{R}_2$ gegeben sind) die $\mathfrak{A}_1$ bekannt sind, so ist die Aufgabe, die $\mathfrak{R}_3$ der Punkte zu finden, nach den im §. 1. aufgestellten Regeln zu lösen. Um aber diese Regeln so einzurichten, dass sie für den vorliegenden Fall passen, müssen wir noch angeben, dass wir die neue $\mathfrak{K}$, nemlich den Durchschnitt der $\mathfrak{T}_3$ mit der $\mathfrak{T}_1$ (oder, wenn $\mathfrak{T}_3 \perp \mathfrak{T}_2$ ist, den Durchschnitt dieser beiden Tafeln) mit $\mathfrak{K}'$ (also einem $\mathfrak{K}$ mit einem Accente, d. i. mit einem rechts oben angebrachten Striche) bezeichnen und Kante prim nennen. Wir wollen ferner festsetzen, dass wir alle auf diese neue Kante ($\mathfrak{K}'$) bezüglichen Namen und Zeichen blos dadurch von denen im §. 1. festgestellten (auf die alte Kante $\mathfrak{K}$ bezüglichen) unterscheiden, dass wir den Namen das Wörtchen „prim“ und den Zeichen einen Accent beifügen. So bedeuten $\mathfrak{K}\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{K}\mathfrak{L}_1'$, $+ \mathfrak{T}_1'$ etc. dasselbe für die $\mathfrak{K}'$, was $\mathfrak{K}\mathfrak{R}$, $\mathfrak{K}\mathfrak{L}_1$, $+ \mathfrak{T}$ etc. für die $\mathfrak{K}$. Ist in einer Aufgabe noch ein weiteres Tafelsystsm angenommen worden, so bezeichnen wir dessen Kante mit $\mathfrak{K}''$ (also mit zwei Accenten) und alle darauf bezüglichen Zeichen ebenfalls mit zwei Accenten, und fügen den Namen das Wörtchen „sekund“ bei; z. B. $\mathfrak{K}\mathfrak{L}''$ (sprich: Kantenloth sekund). Eine fernere Kante wird mit $\mathfrak{K}'''$ (sprich: Kante terz) bezeichnet etc.

Es gelten demnach die im §. 1. aufgestellten Gesetze buchstäblich hieher, wenn man durchweg die dort aufgeführten Bezeichnungen mit Accenten versieht, den dort aufgeführten Namen das Wörtchen prim beifügt, und zugleich, wenn $\mathfrak{T}_3$ auf $\mathfrak{T}_1$ senk-

recht steht (und daher $\mathfrak{T}_3$ und $\mathfrak{T}_1$ die Tafeln des neuen Systems sind) 3 statt 2 setzt, während, wenn $\mathfrak{T}_3$ und $\mathfrak{T}_2$ das neue System bilden, 3 statt 1 zu nehmen ist. Während wir also im $\mathfrak{S}(1,2,\mathfrak{K})$*) einen $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{D}_2$, eine $+\,\mathfrak{T}_1$, $+\,\mathfrak{T}_2$ etc. haben, werden wir im $\mathfrak{S}(1,3,\mathfrak{K}')$ eine $\mathfrak{D}'_1$ und $\mathfrak{D}'_3$, eine $+\,\mathfrak{T}'_1$, $+\,\mathfrak{T}'_3$ etc. dafür erhalten.

63. Denkt man sich die $\mathfrak{T}_1$, und darauf senkrecht die $\mathfrak{T}_2$ und die $\mathfrak{T}_3$, so ist der $\mathfrak{A}_1$ eines Punktes der Länge und dem Vorzeichen nach gleich seiner $\mathfrak{D}_2$ und auch gleich seiner $\mathfrak{D}'_3$; demnach ist auch $\mathfrak{D}_2$ der Länge und dem Vorzeichen nach gleich $\mathfrak{D}'_3$. Ebenso ist, wenn $\mathfrak{T}_3 \perp \mathfrak{T}_2$, die $\mathfrak{D}_1$ eines Punktes der Länge und dem Vorzeichen nach gleich der $\mathfrak{D}'_3$. Wir haben daher den Satz:

> Wenn die $\mathfrak{T}_3$ auf einer der alten Tafeln senkrecht steht, so ist die $\mathfrak{D}'_3$ eines Punktes ihrer Länge und ihrem Vorzeichen nach gleich der in derjenigen Tafel liegenden Ordinate dieses Punktes, mit welcher die $\mathfrak{T}_3$ das neue System nicht bildet.

Steht daher die $\mathfrak{T}_3 \perp \mathfrak{T}_1$, und sind a_2 und a_3 die $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{R}_3$ eines $\mathfrak{P}(a)$, so muss, wenn a_2 in der $+\,\mathfrak{T}_2$ liegt, a_3 in der $+\,\mathfrak{T}'_3$*) sich befinden; es ist demnach durch a_3 bestimmt, welches die $+\,\mathfrak{T}'_3$ ist. Weiss man aber dies, so findet man auch durch Aufklappen der $\mathfrak{T}_3$ und $\mathfrak{T}_1$, wo $+\,\mathfrak{T}'_1$ ist (s. 14.) Wir brauchten demnach kein Uebereinkommen darüber zu treffen, wie wir die $\mathfrak{T}_3$ umklappen, um zu erkennen, wo $+\,\mathfrak{T}'_3$ und $+\,\mathfrak{T}'_1$ ist; wir wollen aber dennoch festsetzen, dass wir die $\mathfrak{T}_3$ entweder so umklappen, dass 1) die beiden $\mathfrak{K}\mathfrak{L}'$ eines jeden Punktes in eine Gerade fallen, oder 2) so, dass dies nicht der Fall ist und daher die $\mathfrak{K}'$ zweimal erscheint, einmal, durch Umklappen der $\mathfrak{T}_1$, in $\mathfrak{K}'_1$ und einmal, durch Umklappen der $\mathfrak{T}'_3$, in $\mathfrak{K}'_3$; in diesem Falle führen wir dann zugleich die Umklappung so aus, dass $\mathfrak{K}'_3$

---

*) Diese Bezeichnuug soll bedeuten: System ($\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{K}$), oder das System, dessen Tafeln $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$, und dessen Kante $\mathfrak{K}$ heisst.

**) Nach den oben (62.) gemachten Bemerkungen wird unter $+\,\mathfrak{T}'_3$ die positive dritte Tafel in Bezug auf die $\mathfrak{K}'$ zu verstehen sein. Es theilt nemlich die $\mathfrak{K}'$ die $\mathfrak{T}_3$ in zwei Theile, wovon einer die $+\,\mathfrak{T}'_3$, der andere die $-\,\mathfrak{T}'_3$ genannt wird.

mit $\mathfrak{K}_2$ zusammenfällt, und hinter $\mathfrak{K}'_3$ die $+\ \mathfrak{T}'_3$ liegt. Steht aber die $\mathfrak{T}_3 \perp \mathfrak{T}_2$, so klappen wir die $\mathfrak{T}_3$ so um, dass $\mathfrak{K}'_3 \mid \mathfrak{K}_1$ und vor $\mathfrak{K}'_3$ die $+\ \mathfrak{T}'_3$ liegt.

Fig. 26. 64. Aufg. Wenn die $\mathfrak{T}_3$ auf einer alten Tafel, z. B. der $\mathfrak{T}_1$, senkrecht steht, aus dem $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ eines beliebigen Punktes den $\mathfrak{R}_3$ und aus dem $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_3$ den $\mathfrak{R}_2$ zu finden.

Aufl. 1. Hat man (Fig. a.) die Tafeln nach 1) der vorigen Nr. umgeklappt, so dass die $\mathfrak{K}'$ durch Umklappung der $\mathfrak{T}_3$ nach $\mathfrak{K}'_3$ kommt, so liegt der $\mathfrak{R}_3$ des $\mathfrak{P}$(a) in der aus a_1 zur $\mathfrak{K}'_3$ gefällten Senkrechten (12.), und ist (nach 63. Satz) $a'_3 a_3 = a_2 a_2$. Aber auf welcher Seite der $\mathfrak{K}'_3$ der Punkt a_3 angenommen wird, steht uns noch frei, da wir noch nicht gesagt haben, wo die $+\ \mathfrak{T}'_3$ liegt. Haben wir aber a_3 angenommen, so ist auch damit bestimmt, dass auf der Seite von $\mathfrak{K}'_3$, wo a_3 liegt, die $+\ \mathfrak{T}'_3$ ist, da auch a_2 in der $+\ \mathfrak{T}_2$ sich befindet. Hat man nun den $\mathfrak{R}_3$ eines Punktes b zu finden, dessen $\mathfrak{R}_2$ in der $-\ \mathfrak{T}_2$ liegt, so wird man ähnlich wie beim $\mathfrak{P}$(a) verfahren; nur wird man b_3 in der $-\ \mathfrak{T}'_3$ annehmen müssen. Sind ferner von einem $\mathfrak{P}$(c) die Risse c_1, c_3 gegeben, so liegt c_2 in der aus c_1 zur $\mathfrak{K}_2$ gefällten Senkrechten, und ist (wieder nach 63. Satz) $c_2 c_2 = c'_3 c_3$ und liegt c_2 in der $+\ \mathfrak{T}_2$, da auch c_3 in der $+\ \mathfrak{T}'_3$ liegt.

Aufl. 2. Klappt man die Tafeln so um, dass die $\mathfrak{K}'$ mit der $\mathfrak{T}_1$ nach $\mathfrak{K}'_1$ und mit der $\mathfrak{T}_3$ nach $\mathfrak{K}'_3$ kommt, und daher, nach der oben (63.) getroffenen Uebereinkunft, die $+\ \mathfrak{T}'_3$ hinter der $\mathfrak{K}'_3$ liegt, so findet man aus den $\mathfrak{K}\mathfrak{R}'_1$ (a'_1, b'_1, c'_1) die $\mathfrak{K}\mathfrak{R}'_3$ (a'_3, b'_3, c'_3) der Punkte a, b, c ganz so, wie dies früher (14.) auseinandergesetzt worden ist, und es gelten wieder die dort aufgestellten Gesetze buchstäblich hieher, wenn wir statt $\mathfrak{A}b_1$, $\mathfrak{A}b_2$, $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$ setzen: $\mathfrak{A}b'_1$, $\mathfrak{A}b'_3$ $\mathfrak{U}'_1$, $\mathfrak{U}'_3$. Zieht man nun die $\mathfrak{K}\mathfrak{L}'_3$ der Punkte a, b, c und trägt darauf von den $\mathfrak{K}\mathfrak{R}'_3$ aus die $\mathfrak{D}_2$ der entsprechenden Punkte auf (63. Satz) und zwar in der $+$ oder $-\ \mathfrak{T}'_3$, je nachdem der $\mathfrak{R}_2$ in der $+$ oder $-\ \mathfrak{T}_2$ liegt, so erhält man die $\mathfrak{R}_3$ (a_3, b_3, c_3). Sind umgekehrt c_1 und c_3 der $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_3$ eines $\mathfrak{P}$(c) (damit sie dies sein können, müssen die $\mathfrak{A}b'_1$ und $\mathfrak{A}b'_3$ dieses Punktes der Länge und dem Vorzeichen nach einander gleich sein (14. Satz)), so liegt c_2 in der aus c_1 zur $\mathfrak{K}_2$ gefällten Senkrechten, und muss $c_2 c_2 = c'_3 c_3$ sein und c_2 in der $+\ \mathfrak{T}_2$ liegen, da c_3 in der $+\ \mathfrak{T}'_3$ sich befindet.

Denkt man sich noch die $\mathfrak{T}_3$ verschoben, bis die $\mathfrak{K}\mathfrak{R}'_1$ ($\mathfrak{a}'_1$, $\mathfrak{b}'_1$, $\mathfrak{c}'_1$) auf die entsprechenden $\mathfrak{K}\mathfrak{R}'_3$ ($\mathfrak{a}'_3$, $\mathfrak{b}'_3$, $\mathfrak{c}'_3$) fallen, so wird man sich überzeugen, dass die $+\ \mathfrak{T}'_1$ auf der Seite der $\mathfrak{K}'_1$ liegt, auf welcher a_1, b_1 sich befinden. Denn es gilt natürlich auch für das neue Tafelsystem der Satz, dass, wenn die beiden Tafeln so umgeklappt werden, dass man sie um ihre Kante dreht, bis sie in einer Ebene liegen, und die Zeichnungen sichtbar sind, die beiden positiven Tafeln auf verschiedenen Seiten der Kante erscheinen.

Anm. Wir überlassen es dem Schüler, die vorliegende Aufgabe für den Fall zu lösen, dass $\mathfrak{T}_3 \perp \mathfrak{T}_2$.

65. Ist die $\mathfrak{T}_3$ auf keiner alten Tafel senkrecht, so ist das Tafelsystem, das sie mit $\mathfrak{T}_1$ (oder $\mathfrak{T}_2$) bildet, ein schiefwinkeliges. Wir nennen auch hier die Kante des neuen Systems $\mathfrak{K}'$. Ferner nennen wir auch hier einen der beiden Theile, in welche die $\mathfrak{T}_3$ von der $\mathfrak{K}'$ getheilt wird, die $+\ \mathfrak{T}'_3$ oder $-\ \mathfrak{T}'_3$, je nachdem der Theil in dem $+$ oder $-$ Raum der $\mathfrak{T}_1$, die Theile der $\mathfrak{T}_1$ die $+\ \mathfrak{T}'_1$ oder $-\ \mathfrak{T}'_1$, je nachdem der Theil in dem $+$ oder $-$ Raum der $\mathfrak{T}_3$ liegt. Um nun die $\mathfrak{T}_3$ vollständig zu bestimmen, zeichnen wir in unserem Blatte den Winkel, den die $+\ \mathfrak{T}'_1$ mit der $+\ \mathfrak{T}'_3$ einschliesst. Diesen Winkel, den die beiden positiven Tafeln eines schiefwinkeligen Systems mit einander bilden, bezeichnen wir mit α', α'', α''' etc., je nachdem die Kante, an welcher der Winkel gebildet wird, mit $\mathfrak{K}'$, $\mathfrak{K}''$, $\mathfrak{K}'''$ etc. bezeichnet ist. Ehe wir nun zeigen, wie man mit Hilfe des $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ eines Punktes den $\mathfrak{R}_3$ findet, müssen wir erst die Gesetze feststellen, denen die Risse eines Punktes bei schiefwinkeligen Systemen unterworfen sind.

Denkt man sich daher von einem $\mathfrak{P}(a)$ ein $\mathfrak{L}_1$ und ein $\mathfrak{L}_3$ auf die beiden Tafeln gefällt, welche diese in den Punkten a_1, a_3 (dem $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_3$ des $\mathfrak{P}(a)$) schneiden, so liegen $\mathfrak{L}_1$ und $\mathfrak{L}_3$ in einer auf der $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_3$ senkrechten Ebene ($\mathfrak{L}\mathfrak{E}'$), welche die $\mathfrak{K}'$ in einem $\mathfrak{P}(\mathfrak{a}')$ schneidet, den wir ebenfalls den $\mathfrak{K}\mathfrak{R}'$ des $\mathfrak{P}(a)$ nennen. Zieht man nun $\mathfrak{a}' a_1$ und $\mathfrak{a}' a_3$, so stehen diese Linien (das $\mathfrak{K}\mathfrak{L}'_1$ und $\mathfrak{K}\mathfrak{L}'_3$) auf der $\mathfrak{K}'$ senkrecht, und es gilt daher auch für das schiefe System der schon früher für das rechtwinkelige entwickelte Satz:

Die Kantenlothe eines Punktes treffen die Kante in einem und demselben Punkte, dem Kantenrisse.

Es können also auch die beiden Tafeln eines schiefwinkeligen Systems so umgeklappt werden, dass

1) die beiden $\mathfrak{RL}'$ eines Punktes in eine Gerade fallen, oder
2) dass dies nicht der Fall ist, und dann müssen die $\mathfrak{A}\mathfrak{b}'_1$ und die $\mathfrak{A}\mathfrak{b}'_3$ eines Punktes der Länge und dem Vorzeichen nach gleich sein.

Dagegen bilden die in der $\mathfrak{LE}'$ des $\mathfrak{P}(a)$ liegenden $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_3$, $\mathfrak{RL}'_1$, $\mathfrak{RL}'_3$ kein Rechteck, sondern eine andere Figur, deren Construction wir kennen lernen wollen.

Anm. Wir wollen von nun an die in dieser Nr. angeführten für jedes Tafelsystem möglichen beiden Umklappungen dadurch bezeichnen, dass wir die unter 1) aufgeführte die erste Umklappungsart, die unter 2) die zweite Umklappungsart nennen. Ferner wollen wir die Umklappung, in welcher man um die Kante dreht, bis beide Tafeln in eine Ebene fallen, wobei die beiden positiven Tafeln auf verschiedenen Seiten der Kante erscheinen, die einfachste Umklappungsart nennen.

Fig. 27. c

66. Wir finden die in der $\mathfrak{LE}'$ eines Punktes, z. B. des $\mathfrak{P}(a)$, liegende von den $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_3$, $\mathfrak{RL}'_1$, $\mathfrak{RL}'_3$ gebildete Figur, indem wir die $\mathfrak{LE}'$ mit der in ihr liegenden Figur auf unser Blatt umklappen, und die Figur, die im Allgemeinen ein Viereck ist, zeichnen. Wir werden diese dann die Nebenfigur des $\mathfrak{P}(a)$ nennen, und die Ecken derselben gerade so bezeichnen, wie sie vor ihrer Umklappung bezeichnet waren. Diese Ecken sind aber der $\mathfrak{P}(a)$ sein $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_3$ und $\mathfrak{RR}'$, die also mit a_1, a_3 und a' bezeichnet sind. Die Seiten dieser Figur aa_1, aa_3, a_1a', a_3a' sind der $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_3$, die $\mathfrak{D}'_1$ und $\mathfrak{D}'_3$ des Punktes. Von den Winkeln ist der von $\mathfrak{D}'_1$ und $\mathfrak{D}'_3$ gebildete der $\measuredangle\, \alpha'$, der von $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{D}'_1$ so wie der von $\mathfrak{A}_3$ und $\mathfrak{D}'_3$ gebildete ist ein rechter. Um aber auch bei der Construction dieser Nebenfigur die Vorzeichen der ihre Seiten bildenden Längen richtig zu benützen, wollen wir zunächst Folgendes bemerken. Die $\mathfrak{LE}'$ eines jeden Punktes schneidet die $\mathfrak{T}_1$ nach einer Geraden, die wir das $\mathfrak{RL}'_1$ genannt haben,

und welche durch den in ihr liegenden $\mathfrak{K}\mathfrak{R}'$ des Punktes in zwei Theile getheilt wird, von denen der in der $+ \mathfrak{T}_1'$ liegende Theil das $+ \mathfrak{K}\mathfrak{L}_1'$, der in der $- \mathfrak{T}_1'$ das $- \mathfrak{K}\mathfrak{L}_1'$ heissen mag. Eben so schneidet die $\mathfrak{L}\mathfrak{E}'$ die $\mathfrak{T}_3$ nach einer Geraden, dem $\mathfrak{K}\mathfrak{L}_3'$, welche durch den $\mathfrak{K}\mathfrak{R}'$ in ein $+ \mathfrak{K}\mathfrak{L}_3'$ und in ein $- \mathfrak{K}\mathfrak{L}_3'$ getheilt wird. Es bilden daher $+ \mathfrak{K}\mathfrak{L}_1'$ und $+ \mathfrak{K}\mathfrak{L}_3'$ den Winkel, den die $+ \mathfrak{T}_1'$ mit der $+ \mathfrak{T}_3'$ einschliesst (Anh. 44) also den $\angle \alpha'$. Ferner theilt das $\mathfrak{K}\mathfrak{L}_1'$ die $\mathfrak{L}\mathfrak{E}'$ in zwei Theile, von denen einer im $+$ Raume der $\mathfrak{T}_1$ liegt und daher das $+ \mathfrak{K}\mathfrak{L}_3'$ enthält, während der andere das $- \mathfrak{K}\mathfrak{L}_3'$ enthaltende im $-$ Raum der $\mathfrak{T}_1$ sich befindet. Ist nun α' der Winkel, den die $+ \mathfrak{T}_1'$ mit der $+ \mathfrak{T}_3'$ einschliesst, so können wir die $\mathfrak{L}\mathfrak{E}'$ so umklappen, dass das $+ \mathfrak{K}\mathfrak{L}_1'$ und $+ \mathfrak{K}\mathfrak{L}_3'$ auf die Schenkel und daher der $\mathfrak{K}\mathfrak{R}'$ auf den Scheitel des in unserem Blatte gezeichneten $\angle \alpha'$ fällt. Kommt dann der in der $\mathfrak{L}\mathfrak{E}'$ liegende $\mathfrak{P}(a)$ nach a, so kommt sein $\mathfrak{R}_1$ nach a_1, sein $\mathfrak{R}_3$ nach a_3 und ist daher aa_1 sein $\mathfrak{A}_1$, aa_3 sein $\mathfrak{A}_3$, $\alpha' a_1$ seine $\mathfrak{D}_1'$, $\alpha' a_3$ seine $\mathfrak{D}_3'$. Ferner ist $\mathfrak{A}_1$ $+$ oder $-$, je nachdem a mit $+ \mathfrak{K}\mathfrak{L}_3'$ oder mit $- \mathfrak{K}\mathfrak{L}_3'$ auf einer Seite des $\mathfrak{K}\mathfrak{L}_1'$ liegt; es ist $\mathfrak{A}_3$ $+$ oder $-$, je nachdem a mit $+ \mathfrak{K}\mathfrak{L}_1'$ oder mit $- \mathfrak{K}\mathfrak{L}_1'$ auf einer Seite von $\mathfrak{K}\mathfrak{L}_3'$ liegt; $\mathfrak{D}_1'$ ist $+$ oder $-$, je nachdem a_1 im $+$ oder $- \mathfrak{K}\mathfrak{L}_1'$ und $\mathfrak{D}_3'$ ist $+$ oder $-$, je nachdem a_3 im $+$ oder $- \mathfrak{K}\mathfrak{L}_3'$ liegt.

67. Nun können wir die Aufgabe lösen: Es sind mehrere Punkte a, b, c gegeben; man soll ihre $\mathfrak{R}_3$ auf einer $\mathfrak{T}_3$ finden, welche die $\mathfrak{T}_1$ nach $\mathfrak{K}_1'$ schneidet, und so gestellt ist, dass die $+ \mathfrak{T}_3'$ mit der $+ \mathfrak{T}_1'$ den $\angle \alpha'$ (Fig. c.) bildet, und auf der Seite der $\mathfrak{K}'$, in welcher sich a_1 befindet, die $+ \mathfrak{T}_1'$ liegt. Fig. 27.

Aufl. 1. Wählen wir die einfachste Umklappungsart, so liegen die $\mathfrak{R}_3$ der gegebenen Punkte in den aus ihren $\mathfrak{R}_1$ zu $\mathfrak{K}'$ gezogenen Senkrechten und man hat nur noch die $\mathfrak{D}_3'$ dieser Punkte zu suchen. Klappen wir daher die $\mathfrak{L}\mathfrak{E}'$ des $\mathfrak{P}(a)$ so um, dass das $+ \mathfrak{K}\mathfrak{L}_1'$ und $+ \mathfrak{K}\mathfrak{L}_3'$ auf die Schenkel des $\angle \alpha'$ (Fig. c.) fallen, so kommt α' (Fig. a.) nach α' (Fig. c.), $\alpha' a_1$ nach $\alpha' a_1$, das $\mathfrak{L}_1$ des $\mathfrak{P}(a)$ nach $a_1 a$, und der $\mathfrak{P}(a)$ nach a so, dass $a a_1$ gleich dem $\mathfrak{A}_1$ des $\mathfrak{P}(a)$, also gleich $a_2 a_2$ ist, und dass, weil der $\mathfrak{P}(a)$ in dem $+$ Raum der $\mathfrak{T}_1$ liegt, a mit dem $+ \mathfrak{K}\mathfrak{L}_3'$ auf einer Seite des $\mathfrak{K}\mathfrak{L}_1'$ sich befindet. Zieht man nun $a a_3 \perp \mathfrak{K}\mathfrak{L}_3'$, so ist $aa_1\alpha' a_3$ die Nebenfigur und $\alpha' a_3$ die $\mathfrak{D}_3'$ und zwar hier

positiv, da a_3 in dem $+ \mathfrak{K}\mathfrak{L}'_3$ erscheint; trägt man daher diese $\mathfrak{D}'_3$ von α' aus in der $+ \mathfrak{T}'_3$ auf das $\mathfrak{K}\mathfrak{L}'_3$ (Fig. a.), so erhält man den $\mathfrak{R}_3(a_3)$ des $\mathfrak{P}(a)$, dessen $\mathfrak{A}_3 = aa_3$ der Nebenfigur und hier positiv ist (letzteres, weil a mit der $+ \mathfrak{K}\mathfrak{L}'_1$ auf einer Seite von $\mathfrak{K}\mathfrak{L}'_3$ liegt). In ähnlicher Art verfährt man, um b_3 und den $\mathfrak{A}_3$ des $\mathfrak{P}(b)$ zu erhalten, nur ist die $\mathfrak{D}'_1$ und der $\mathfrak{A}_3$ des $\mathfrak{P}(b)$ negativ; eben so mit dem $\mathfrak{P}(c)$, nur ist hier die Nebenfigur ein überschlagenes Viereck (in welchem zwei Seiten sich gegenseitig durchschneiden); ebenso mit dem $\mathfrak{P}(d)$, nur ist sein $\mathfrak{A}_3 = 0$, da er, wie man aus Fig. c. sieht, mit seinem a_3 zusammenfällt.

Aufl. 2. Klappt man die Tafeln so um, dass die $\mathfrak{K}'$ zweimal, in $\mathfrak{K}'_1$ und in $\mathfrak{K}'_3$ erscheint, so werden die $\mathfrak{K}\mathfrak{R}'_3$ der Punkte a, b, c nemlich a'_3, b'_3, c'_3 (Fig. b.), aus ihren $\mathfrak{K}\mathfrak{R}'_1$ so gefunden, wie in 14. angegeben worden ist (s. 65.), und fällt aus bekannten Gründen die $+ \mathfrak{T}'_3$ auf die Seite von $\mathfrak{K}'_3$, in welcher der Punkt a_3 liegt. Weiss man nun aber die $\mathfrak{K}\mathfrak{R}'_3$ der Punkte, und wo $+ \mathfrak{T}'_3$ und $- \mathfrak{T}'_3$ ist, so darf man nur auf die $\mathfrak{K}\mathfrak{L}'_3$ die entsprechenden $\mathfrak{D}'_3$ auftragen, welche letztere nebst den $\mathfrak{A}_3$ ganz so wie in Aufl. 1. gefunden werden.

Fig. 27.

68. Wir haben oben bemerkt, dass die Nebenfigur eines Punktes a im Allgemeinen ein Viereck ist, dessen Ecken a, a_1, a_3, α' sind. Es ist aber leicht einzusehen, dass wenn zufällig zwei von diesen vier Ecken zusammenfallen, eine Seite des Vierecks verschwindet, und demnach als Nebenfigur ein Dreieck bleibt, und zwar ein rechtwinkeliges, da von dem Viereck, das zwei rechte Winkel enthielt, nur ein Winkel verschwunden ist, also ein rechter noch übrig geblieben ist. Es kann auch kommen, dass ausnahmsweise die vier Ecken des Viereckes in einen Punkt zusammenfallen (die ganze Figur also verschwindet), wenn nemlich der Punkt a in der $\mathfrak{K}'$ liegt.

Von den ebengenannten Fällen wollen wir einen einer besonderen Betrachtung unterziehen, den nemlich, in welchem der Punkt in der $\mathfrak{T}_3$ liegt, wie der $\mathfrak{P}(d)$ in unserer Figur. Hier fällt d_3 mit d zusammen (wir haben daher den Buchstaben d_3 weggelassen) und die Nebenfigur ist daher das rechtwinkelige Dreieck $dd_1\alpha'$, dessen Seiten $\alpha' d_1$, $d_1 d$, $\alpha' d$ die $\mathfrak{D}'_1$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{D}'_3$ des Punktes d vorstellen, und in welchem der $\bigwedge \alpha'$ (Fig. 27. c.)

oder sein Supplement, wenn (Fig. 27. d.) der $\angle\, \alpha'$ stumpf ist, dem $\mathfrak{A}_1$ gegenüber liegt. Erscheint hier d und das damit zusammenfallende d_3 im $+\, \mathfrak{K}\mathfrak{L}'_3$ (wie in unserer Zeichnung) so liegt der Punkt in der $+\, \mathfrak{T}'_3$ also auch im $+$ Raum der $\mathfrak{T}_1$; demnach ist sein $\mathfrak{D}'_3$ und $\mathfrak{A}_1$ positiv. Liegt aber d im $-\, \mathfrak{K}\mathfrak{L}'_3$, so sind $\mathfrak{D}'_3$ und $\mathfrak{A}_1$ gleichzeitig negativ. Es haben also $\mathfrak{D}'_3$ und $\mathfrak{A}_1$ des Punktes gleiche Vorzeichen. Ist noch ausserdem der $\angle\, \alpha'$ ein spitzer Winkel, so sieht man leicht ein, dass wenn (in der Nebenfigur des Punktes d) d_1 im $+\, \mathfrak{K}\mathfrak{L}'_1$ liegt, auch d im $+\, \mathfrak{K}\mathfrak{L}'_3$ erscheint, und demnach die durch die drei Seiten der dreiseitigen Nebenfigur vertretenen Längen ($\mathfrak{D}'_1$, $\mathfrak{D}'_3$, $\mathfrak{A}_1$) gleichzeitig positiv sind. In ähnlicher Weise kann man sich überzeugen, dass unter derselben Voraussetzung für den $\angle\, \alpha'$ diese drei Längen gleichzeitig negativ werden. Wir haben also die Sätze:

1) Bilden die beiden Tafeln ($\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_3$) des neuen Tafelsystems den schiefen Winkel α', und liegt ein $\mathfrak{P}$(d) in der $\mathfrak{T}_3$, so ist seine Nebenfigur ein rechtwinkeliges Dreieck, in welchem die den $\mathfrak{A}_1$ vorstellende Kathete dem $\angle\, \alpha'$ oder seinem Supplementswinkel gegenüber liegt, und haben $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{D}'_3$ gleiche Vorzeichen;
2) ist der $\angle\, \alpha'$ spitz, so haben die drei Seiten des Dreiecks gleiche Vorzeichen;
3) sind demnach die $\mathfrak{K}'$ und ein $\mathfrak{P}$(d) in der $\mathfrak{T}_3$ (also auch sein $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{D}'_1$) bekannt, so hat man von der (dreiseitigen) Nebenfigur des $\mathfrak{P}$(d) zwei Seiten (nemlich seine beiden Katheten) und damit das ganze Dreieck. Daraus bestimmt sich der $\angle\, \alpha'$; denn dieser steht entweder derjenigen Kathete des Dreiecks, welchen den $\mathfrak{A}_1$ des $\mathfrak{P}$(d) vorstellt, gegenüber, oder ist dessen Supplementswinkel, je nachdem α' spitz oder stumpf ist, d. h. je nachdem d_1 im $+\, \mathfrak{K}\mathfrak{L}'_1$ (also in der $+\, \mathfrak{T}'_1$) oder im $-\, \mathfrak{K}\mathfrak{L}'_1$ (also in der $-\, \mathfrak{T}'_1$) liegt.

69. Hat man umgekehrt aus dem $\mathfrak{R}_3$ und $\mathfrak{A}_3$ eines Punktes z. B. des $\mathfrak{P}$(c) den $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ zu finden (d. h. aus dem neuen Tafelsystem in's alte zurückzugehen), so wird man zunächst aus dem $\mathfrak{K}\mathfrak{L}'_3$ des Punktes das $\mathfrak{K}\mathfrak{L}'_1$ bestimmen (das entweder, bei der Fig. 27.

einfachsten oder ersten Umklappungsart, mit $\mathfrak{RL}'_3$ zusammenfällt, oder, bei der zweiten Umklappungsart, dadurch gefunden wird, dass man die $\mathfrak{Ab}'_1 = \mathfrak{Ab}'_3$ macht) und dann die auf das $\mathfrak{RL}'_1$ aufzutragende $\mathfrak{D}'_1$ mittelst der Nebenfigur aufsuchen. Zu dem Ende trägt man auf das $\mathfrak{RL}'_3$ (der Nebenfigur 27. c.) die (aus Fig. 27. a. zu entnehmende) $\mathfrak{D}'_3$, wodurch man c_3 erhält; errichtet man nun in c_3 eine Senkrechte zum $\mathfrak{RL}'_3$ (das $\mathfrak{L}_3$) und trägt darauf die als gegeben vorausgesetzte Länge des $\mathfrak{A}_3$ nach c_3c (das hier negativ aufgetragen ist, weil wir den $\mathfrak{A}_3$ als negativ voraussetzen), so kann man die Nebenfigur vollenden, wenn man noch $cc_1 \perp \mathfrak{RL}'_1$ zieht. Man erhält dadurch die gesuchte $\mathfrak{D}'_1$ (nemlich $a'a_1$ der Nebenfigur).

Anm. Liegt der Punkt in der $\mathfrak{T}_3$, ist also sein $\mathfrak{A}_3 = 0$, so bleibt das Verfahren dasselbe, nur ist die Nebenfigur ein rechtwinkeliges Dreieck.

Fig. 27.

70. Obgleich wir gezeigt haben, wie man auch mittelst eines schiefwinkeligen Tafelsystems Punkte bestimmen kann, so dürfen wir doch für die praktische Anwendung nur rechtwinkelige Tafelsysteme benützen; wir müssen daher, wenn die $\mathfrak{T}_3$ auf keiner alten Tafel senkrecht steht, und dieselbe nicht blos vorübergehend (als Hilfsmittel zur Lösung der Aufgabe) angenommen ist, sondern bleibend beibehalten werden soll, noch eine auf der $\mathfrak{T}_3$ senkrechte Tafel (wir wollen sie $\mathfrak{T}_4$ und ihren Schnitt mit der $\mathfrak{T}_3$ die $\mathfrak{R}''$ nennen) annehmen, und nach deren Umklappung die $\mathfrak{R}_4$ der Punkte zeichnen. Hiebei hat man dann ganz genau dieselbe Aufgabe zu lösen, wie oben (64.), um aus den $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{A}_1$ der Punkte die $\mathfrak{R}_3$ zu finden, wenn die $\mathfrak{T}_3 \perp \mathfrak{T}_1$ ist. Es werden nur in den Benennungen Aenderungen eintreten müssen, indem in vorliegendem Falle die beiden Tafeln nicht $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_3$, sondern $\mathfrak{T}_3$, $\mathfrak{T}_4$ heissen, und auch die Kante der beiden Tafeln nicht mit $\mathfrak{R}'$, sondern mit $\mathfrak{R}''$ bezeichnet ist. Diese $\mathfrak{T}_4$ nehmen wir natürlich so an, dass sie gegen die gegebenen Geraden und Ebenen eine möglichst bequeme Lage einnimmt.

a) Klappen wir nun (Fig. a.) die Tafeln so um, dass sie die $\mathfrak{R}''$ gemein behalten, so liegen die $\mathfrak{R}_4$ der Punkte a, b, c in den aus ihren $\mathfrak{R}_3$ zur $\mathfrak{R}''$ gefällten Senkrechten a_3a_4, b_3b_4 und ist die $\mathfrak{D}''_4$ $(a''a_4)$ gleich dem $\mathfrak{A}_3$ des $\mathfrak{P}(a)$; da dieser $= aa_3$ (Fig. c.) und positiv ist (s. 66.), so wird, wenn man $a''a_4 = aa_3$

macht, und wie in Fig. a. aufträgt, a_4 der $\mathfrak{R}_4$ des $\mathfrak{P}$(a) und zugleich ausgesprochen sein, dass auf der Seite von $\mathfrak{K}''$, wo a_4 liegt, die $+ \mathfrak{T}_4''$ und daher auf der anderen Seite der $\mathfrak{K}''$ die $+ \mathfrak{T}_3''$ sich befindet. Hat man daher vom $\mathfrak{P}$(b) den $\mathfrak{R}_4$ zu suchen, so wird man $\mathfrak{b}''b_4 = bb_3$ machen und, da der $\mathfrak{A}_3$ von b negativ ist, b_4 in der $- \mathfrak{T}_4''$ annehmen, während der $\mathfrak{R}_4$ des $\mathfrak{P}$(c) in der $- \mathfrak{T}_4''$ und der des $\mathfrak{P}$(d) in der $\mathfrak{K}''$ liegt.

b) Klappt man (wie in Fig. b.) die Tafeln so um, dass $\mathfrak{K}''$ zweimal erscheint, einmal mit der $\mathfrak{T}_3$ in $\mathfrak{K}_3''$, und einmal mit der $\mathfrak{T}_4$ in $\mathfrak{K}_3''$, so wird man aus $\mathfrak{a}_3''$, $\mathfrak{b}_3''$, $\mathfrak{c}_3''$, $\mathfrak{d}_3''$ die $\mathfrak{K}\mathfrak{R}_4''$ ($\mathfrak{a}_4''$, $\mathfrak{b}_4''$, $\mathfrak{c}_4''$, $\mathfrak{d}_4''$), und die Seite von $\mathfrak{K}_4''$, auf welcher die $+ \mathfrak{T}_4''$ liegt, nach den in Num. 13. und 14. aufgestellten Regeln finden, und zur Aufsuchung von a_4, b_4, c_4, d_4 wie vorhin verfahren.

Anm. 1. Wir haben hier gezeigt, wie man die $\mathfrak{R}_4$ der Punkte für irgend eine auf der $\mathfrak{T}_3$ senkrechten $\mathfrak{T}_4$ auffindet. Eine solche besondere $\mathfrak{T}_4$ nehmen wir immer an, wenn es sich darum handelt, sie so zu wählen, dass sie gegen die gegebenen Dinge eine besonders günstige Stellung einnehmen soll. Ist es aber gleichgültig, welche Stellung die $\mathfrak{T}_4$ gegen die $\mathfrak{T}_3$ hat und nur verlangt, dass die $\mathfrak{T}_4 \perp \mathfrak{T}_3$ ist, so lässt sich die Sache viel einfacher machen. In diesem Falle giebt, wie man sich leicht überzeugen kann, die sämmtliche Nebenfiguren enthaltende Fig. 27. c. die $\mathfrak{R}_4$ aller Punkte an. Man darf zu dem Ende nur irgend ein $\mathfrak{K}\mathfrak{L}_3'$ (z. B. das des Punktes a der Fig. 27. a) als die $\mathfrak{K}_3''$ und das $\mathfrak{K}\mathfrak{L}_3'$ der Fig. 27. c. als $\mathfrak{K}_4''$ ansehen, so wird man finden, dass die in dieser Figur mit den Buchstaben a, b, c (also mit Buchstaben ohne Ziffer) bezeichneten Punkte die $\mathfrak{R}_4$ dieser Punkte sind. Man wird daher, wenn die Fig. 27. c. als $\mathfrak{R}_4$ des gegebenen Gebildes angesehen werden soll, statt der Buchstaben a, b, c etc. die a_4, b_4, c_4 etc., $\mathfrak{K}_4''$ statt $\mathfrak{K}\mathfrak{L}_3'$ schreiben und die $\mathfrak{K}\mathfrak{L}_1'$ mit den darin liegenden Punkten und Buchstaben und den darauf senkrechten Linien weglöschen.

Anm. 2. Liegen alle Punkte der Aufgabe in der $\mathfrak{T}_3$, dann brauchen wir natürlich eine $\mathfrak{T}_4$ nicht beizufügen.

71. Hat man umgekehrt den $\mathfrak{R}_3$ und $\mathfrak{R}_4$ eines $\mathfrak{P}$(c) und Fig. 27. soll man dessen $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ finden, so wird man denselben Weg zurück machen müssen, den man, um aus dem $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ des $\mathfrak{P}$(c) den $\mathfrak{R}_3$ und $\mathfrak{R}_4$ zu finden, vorwärts machen muss.

a) Sind die Tafeln wie in Fig. a. umgeklappt worden, so ist c_3c' die $\mathfrak{D}'_3$ und muss sie, da diese + ist, (in Fig. c.) von a' aus auf das + $\mathfrak{K}\mathfrak{L}'_3$ aufgetragen werden; ferner ist $c''c_4$ die $\mathfrak{D}''_4$ des $\mathfrak{P}(c)$, und muss sie, da diese negativ, (weil in der — $\mathfrak{T}''_4$) und gleich dem $\mathfrak{A}_3$ ist, nach c_3c und zwar so getragen werden, dass c mit dem — $\mathfrak{K}\mathfrak{L}'_1$ auf einer Seite von $\mathfrak{K}\mathfrak{L}'_3$ liegt (s. 66). Zieht man nun cc_1, so erhält man durch $a'c_1$ die $\mathfrak{D}'_1$ des $\mathfrak{P}(a)$, und ist diese +, weil c_1 in dem + $\mathfrak{K}\mathfrak{L}'_1$ liegt; ferner durch cc_1 den $\mathfrak{A}_1$, welcher gleich der $\mathfrak{D}_2$ des $\mathfrak{P}(c)$, und hier + ist, weil c mit der + $\mathfrak{K}\mathfrak{L}'_3$ auf einer Seite von $\mathfrak{K}\mathfrak{L}'_1$ liegt. Zieht man daher aus c_3 eine Senkrechte zur $\mathfrak{K}'$ und trägt darauf die $\mathfrak{D}'_1$ von c' aus in der + $\mathfrak{T}'_1$ auf, so erhält man c_1; zieht man dann c_1c_2 $\perp$ $\mathfrak{K}$ und trägt von c_2 aus die $\mathfrak{D}_2$ in der + $\mathfrak{T}_2$ auf, so erhält man c_2.

b) Sind die Tafeln wie in Fig. b. umgeklappt, so verfährt man ähnlich so, wie in Fig. a., nur muss man aus dem $\mathfrak{K}\mathfrak{R}'_3$ den $\mathfrak{K}\mathfrak{R}'_1$ mit Hilfe der in Num. 14. aufgestellten Regeln aufsuchen.

72. Wir haben bisher gezeigt, wie man für das schiefwinkelige Tafelsystem vom alten System in's neue, und umgekehrt, übergeht, wenn die $\mathfrak{K}'$ und der $\angle\, \alpha'$ gegeben sind. Die Fälle, in denen wir auf ein derartiges Tafelsystem geführt werden, sind aber der Art, dass diese Dinge nicht gegeben sind, sondern aus den gegebenen Bedingungen erst gesucht werden müssen; wir haben daher zu zeigen wie dies zu geschehen hat.

Wie schon früher gezeigt wurde, kommen wir auf eine $\mathfrak{T}_3$, die auf keiner alten Tafel senkrecht steht in zwei Fällen, wenn entweder die $\mathfrak{T}_3 \parallel \mathfrak{E}(abc)$ oder $\perp \mathfrak{G}(A)$ sein soll. Ist nun

1) $\mathfrak{T}_3 \parallel \mathfrak{E}(abc)$ und lassen wir, wie früher festgesetzt, $\mathfrak{T}_3 \mid \mathfrak{E}(abc)$, und nehmen diese $\mathfrak{T}_3$ mit $\mathfrak{T}_1$ zu einem Systeme zusammen, so ist die $\mathfrak{K}'$ (der Schnitt der $\mathfrak{T}_3$ mit $\mathfrak{T}_1$) offenbar nichts anderes als die Spur eins der $\mathfrak{E}(abc)$. Hat man sich nun durch Aufsuchung der Spur eins der $\mathfrak{E}(abc)$ die $\mathfrak{K}'$ verschafft, und will man noch den $\angle\, \alpha'$ erhalten, so braucht man dazu nur die Nebenfigur eines der Punkte a, b, c zu zeichnen. Diese Nebenfigur ist ein rechtwinkeliges Dreieck, dessen Seiten die $\mathfrak{D}'_1$, die $\mathfrak{D}'_3$ und den $\mathfrak{A}_1$ des Punktes vorstellen, und in welchem der dem $\mathfrak{A}_1$ gegenüber liegende Winkel der $\angle\, \alpha'$ selbst, oder sein Supplement ist, je nachdem $\mathfrak{D}'_1$ und $\mathfrak{A}_1$ gleiche oder

ungleiche Vorzeichen haben. Ist man aber so in den Besitz von $\mathfrak{R}'$ und $\bigwedge \alpha'$ gelangt, so kann man nun mit Hilfe der obigen Regeln für alle weiteren Punkte aus dem alten System in's neue, und umgekehrt, übergehen.

2) Ist die $\mathfrak{T}_3 \perp \mathfrak{G}(ab)$ und bilden $\mathfrak{T}_3$ und $\mathfrak{T}_1$ das neue Tafelsystem, so ist die $\mathfrak{R}'$ (der Schnitt der $\mathfrak{T}_3$ mit $\mathfrak{T}_1$, also die Spur eins der $\mathfrak{T}_3$) $\perp a_1 b_1$. Um nun den $\bigwedge \alpha'$ zu finden, sucht man die Nebenfiguren der beiden Punkte a und b. Diese beiden Nebenfiguren liegen in einer Ebene, da die beiden $\mathfrak{LE}'$ der Punkte a und b zusammenfallen. Klappt man nun diese gemeinschaftliche $\mathfrak{LE}'$ so in unser Blatt, dass $a_1 b_1$ (Fig. a) nach ab_1 (Fig. b) kommt, so kommen die Punkte a, b im Raume nach a, b (der Fig. b), wenn man $b_1 b = \mathfrak{A}_1$ des $\mathfrak{P}(b)$ macht und bedenkt, dass in nnserer Zeichnung das $\mathfrak{A}_1$ des $\mathfrak{P}(a) = 0$ ist. Da aber ab ein $\mathfrak{L}_3$ ist (wir haben ja die $\mathfrak{T}_3 \perp$ ab angenommen), so muss in unserer Nebenfigur (Fig. b) $\mathfrak{RL}'_3 \perp$ ab werden, ausserdem durch a gehen (da der $\mathfrak{P}(a)$ in der $\mathfrak{R}'$ liegt). Man hat demnach den (von dem $+ \mathfrak{RL}'_1$ und $+ \mathfrak{RL}'_3$ gebildeten Winkel) $\bigwedge \alpha'$ gefunden und kann nach den früheren Regeln die $\mathfrak{R}_3$ aller gegebenen Punkte finden. Fig. 34.

73. Es giebt Fälle, in denen es vortheilhaft ist, die Risse der gegebenen Punkte, Geraden und Ebenen nach einem anderen Systeme, als es bisher geschehen, aufzusuchen, und zwar so, dass man die Linien, welche man durch die Punkte legt, um ihre Risse in einer Tafel zu finden, nicht wie bisher senkrecht zu dieser Tafel macht, sondern, dass man sie entweder

a) alle parallel zu einer gegebenen zu den Tafeln schiefen Geraden annimmt, und daher die Risse schiefe Parallelrisse oder schlechtweg Parallelrisse nennt, oder

b) dass man jene Linien alle durch einen gegebenen Punkt (Centrum) gehen lässt, und daher die Risse Centralrisse heisst.

In beiden Fällen nennen wir die Geraden, welche man durch die Punkte legt, um ihre Risse zu finden, Strahlen (St) und die durch sie gefundenen Risse Strahlenrisse. Im Gegensatz zu diesen nennen wir die gewöhnlichen (durch Lothe gefundenen) Risse Lothrisse. Ist nur ein System von schiefen oder Centralrissen vorhanden, so nennen wir die Risse, zum Unterschied von den schon vorhandenen $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$, Risse prim

($\mathfrak{R}'$), und bezeichnen diese $\mathfrak{R}'$ mit denselben Buchstaben, wie die ihnen entsprechenden Punkte, versehen sie aber mit einem Accent, d. h. rechts oben mit einem Striche (z. B. a′, sprich: a prim). Sind mehrere Systeme von Stahlenrissen vorhanden, so bezeichnen wir sie im ersten System mit einem Accent, im zweiten mit zwei Accenten (z. B. a″, sprich a sekund), im dritten mit drei Accenten (z. B. a‴ sprich: a terz) u. s. f.

Als Tafel, auf welcher die Stahlenrisse erscheinen sollen, nehmen wir wo möglich eine der gegebenen Tafeln ($\mathfrak{T}_1$ oder $\mathfrak{T}_2$) an. Meistens aber werden wir eine andere Ebene und zwar eine $\mathfrak{LE}_1$ oder $\mathfrak{LE}_2$ als solche Tafel ansehen, und sie dann $\mathfrak{T}'$ (sprich Tafel prim), $\mathfrak{T}''$ etc. nennen. In diesem Falle klappen wir gewöhnlich die $\mathfrak{T}'$ nicht um, und können wir daher die $\mathfrak{R}'$ nicht selbst zeichnen, sondern wir zeichnen von einem solchen Punkte (a′ z. B.), der den $\mathfrak{R}'$ eines gegebenen $\mathfrak{P}$(a) vorstellt, seinen ersten und zweiten Riss, und nennen den ersteren $\mathfrak{R}'_1$ (sprich: $\mathfrak{R}$ prim eins) den letzteren $\mathfrak{R}'_2$ ($\mathfrak{R}$ prim zwei). Ebenso bezeichnen wir den $\mathfrak{R}'_1$ des $\mathfrak{P}$(a) mit a'_1 (sprich a prim eins), den $\mathfrak{R}'_2$ mit a'_2.

Fig. 28. 74. Aufg. Den schiefen oder Centralriss eines gegebenen Punktes zu finden.

Aufl. 1. Sollen (Fig. a.) alle $\mathfrak{St}'$ parallel zur $\mathfrak{G}$(A), und $\mathfrak{E}(B_2)$ die $\mathfrak{T}'$ sein, und ist der $\mathfrak{R}'$ eines $\mathfrak{P}$(a) zu finden, so hat man durch den $\mathfrak{P}$(a) eine $\mathfrak{St}'$, d. h. eine $\mathfrak{G}$(C) $\parallel$ A zu legen, und den Punkt a′ zu suchen, in welchem die $\mathfrak{G}$(B) die $\mathfrak{T}'$ trifft; dieser Punkt ist der gesuchte $\mathfrak{R}'$, von dem wir also den ersten und zweiten Riss (a'_1, a'_2) zeichnen.

Aufl. 2. Sollen (Fig. b.) alle $\mathfrak{St}'$ durch den $\mathfrak{P}$(a) gehen, und ist der $\mathfrak{R}'$ eines $\mathfrak{P}$(b) zu finden, so muss man eine $\mathfrak{G}$(A) suchen, welche den gegebenen $\mathfrak{P}$(b) mit dem Centrum a verbindet; der Schnitt dieses $\mathfrak{St}'$ mit $\mathfrak{T}'$ (hier die $\mathfrak{E}(B_2)$) ist dann der gesuchte $\mathfrak{R}'$.

75. Da wir nicht annehmen können, dass die im §. 1. entwickelten Sätze, in welchen die $\mathfrak{St}$ als Lothe vorausgesetzt sind, für schiefe und Centralrisse gelten, so wollen wir hier diejenigen Sätze entwickeln, welche diesen Risssystemen entsprechen.

1) Liegt ein Punkt in der $\mathfrak{T}'$, so fällt sein $\mathfrak{R}'$ mit ihm selbst zusammen.

2) Wenn man sich durch alle Punkte einer Linie oder Fläche St′ gelegt denkt und deren ℜ′ sucht, so ist der Inbegriff aller dieser ℜ′ der ℜ′ der Linie oder Fläche; daraus folgt, dass

3) der ℜ′ eines in einer Raumgrösse liegenden Punktes, in dem ℜ′ dieser Raumgrösse liegt, und dass

4) wenn ein Punkt in zwei Raumgrössen liegt, auch die ℜ′ dieser Raumgrössen einen Punkt gemein haben müssen.

5) Der ℜ′ eines Punktes ist der Durchschnitt seines St′ mit der 𝔗′.

6) Ist der ℜ′ eines Punktes bekannt, so liegt dieser in dem St′, welcher durch den gegebenen ℜ′ geht.

7) Ist ein St′ gegeben, und legt man durch einen beliebigen Punkt desselben einen St′, so fällt dieser mit dem gegebenen St′ zusammen; demnach ist der ℜ′ eines St′ der Punkt, in welchem er (der St′) die 𝔗′ schneidet.

8) Ist eine Gerade kein St′, so liegen die St′ ihrer Punkte in einer Ebene (Strahlenebene, abg. St𝔈′), die für die schiefen Risse parallel zu den St′, für die Centralrisse durch das Centrum geht; es ist daher der ℜ′ einer Geraden A, die kein St′ ist, eine Gerade A′, nach welcher die St𝔈′ der 𝔊(A) die 𝔗′ schneidet.

9) Man findet daher auch den ℜ′ einer Geraden, die kein St′ ist, wenn man die ℜ′ zweier Punkte derselben sucht, und durch eine Gerade verbindet.

10) Ist A′ der ℜ′ einer 𝔊(A), so liegt diese in der durch A′ gehenden St𝔈′; (diese ist ausserdem bei dem schiefen Risssystem parallel zu den St′, und geht bei dem Centralrisssystem durch das Centrum).

11) Liegen Gerade in der 𝔗′, so fallen sie mit ihren ℜ′ zusammen.

12) Ist eine Gerade A parallel zur 𝔗′, so schneidet ihre St𝔈′ die 𝔗′ nach einer Geraden A′, die ∥ 𝔊(A) (Anh. 29.) Es

ist demnach eine zur $\mathfrak{T}'$ parallele Gerade parallel zu ihrem $\mathfrak{R}'$.

13) Geht eine Ebene durch das Centrum (für Centralrisse), oder ist sie (beim schiefen Risssystem) paralel zu den $\mathfrak{St}'$, so fallen alle $\mathfrak{St}'$ ihrer Punkte in sie selbst, und ist daher ihr $\mathfrak{R}'$ eine Gerade A', und zwar die, nach welcher die Ebene die $\mathfrak{T}'$ schneidet. Wir nennen diese Ebene eine $\mathfrak{StE}'$ und bezeichnen sie als Ebene A' ($\mathfrak{E}(A')$).

14) Sind die Geraden A, B, C etc., die keine $\mathfrak{St}$ sind, parallel, so sind es auch ihre schiefen Risse; denn die $\mathfrak{StE}'$ von A und B z. B. sind parallel, weil A || B, und irgend ein $\mathfrak{St}'$ in der einen $\mathfrak{StE}'$ parallel zu irgend einem $\mathfrak{St}'$ in der andern ist (und die $\mathfrak{G}(A)$ jeden in ihrer $\mathfrak{StE}'$ liegenden $\mathfrak{St}'$ schneidet, da vorausgesetzt wurde, dass A kein $\mathfrak{St}'$ ist).

15) Sucht man die Centralrisse der parallelen Geraden A, B, C etc., die keine $\mathfrak{St}'$ sind, so gehen alle ihre $\mathfrak{StE}'$ durch die Gerade D, welche durch das Centrum geht, und mit A, B, C etc. parallel ist; demnach gehen die $\mathfrak{R}'$ der Geraden A, B, C etc. durch den $\mathfrak{P}(a)$, in welchem die $\mathfrak{G}(D)$ die $\mathfrak{T}'$ schneidet. Man nennt die Gerade D, welche durch das Centrum geht (also ein $\mathfrak{St}'$ ist) und mit einer geraden A parallel ist, den Hauptstrahl der Geraden A und den $\mathfrak{P}(a)$, in welchem sie (die $\mathfrak{G}(D)$) die $\mathfrak{T}'$ schneidet, Fliehpunkt, Fluchtpunkt, Flucht der $\mathfrak{G}(A)$. Also haben wir den Satz:

Die Centralrisse paralleler Geraden schneiden sich in einem Punkte (ihrer Flucht). Diese Flucht ist der Schnitt des Hauptstrahles der Geraden mit der $\mathfrak{T}'$.

16) Ist eine Gerade A parallel mit einer $\mathfrak{StE}'$, so liegt deren Flucht in dem $\mathfrak{R}'$ der $\mathfrak{StE}'$.
Denn legt man durch A eine $\mathfrak{StE}'$, so schneidet diese die gegebene $\mathfrak{StE}'$ nach einer durch das Centrum gehenden Geraden, die $\parallel \mathfrak{G}(A)$ ist, also nach dem Hauptstrahl von A. Da nun der Hauptstrahl von A in der gegebenen $\mathfrak{StE}'$

liegt, so muss auch der $\mathfrak{R}'$ des Hauptstrahles, d. i. die Flucht von A, in dem $\mathfrak{R}'$ der Ebene liegen.

17) Ist A eine gegebene Gerade, von welcher der Parallelriss gesucht werden soll, so sucht man, wie schon oben gesagt, zwei Punkte dieses Risses. Es ist nun bequem, als einen dieser Punkte die Spur prim, d. h. den Durchschnitt der $\mathfrak{G}$(A) mit der $\mathfrak{T}'$, zu suchen, da der $\mathfrak{R}'$ dieses Punktes (als Punkt in der $\mathfrak{T}'$) der Punkt selbst ist.

18) Ist $\mathfrak{E}(A_1)$ (Fig. 36) die $\mathfrak{T}'$, $\mathfrak{P}$(a) das Centrum von Centralstrahlen und soll der $\mathfrak{R}'$ der $\mathfrak{G}$(B) gefunden werden, so suchen wir wieder zwei Punkte dieses $\mathfrak{R}'$ und zwar am Besten wieder die Spur prim (b) der Geraden, und ausserdem die Flucht, nemlich den $\mathfrak{P}$(c), in welchem der Hauptstrahl der $\mathfrak{G}$(B) die $\mathfrak{T}'$ (d. i. die $\mathfrak{E}(A_1)$) schneidet. Die $\mathfrak{G}$(bc) ist dann B'. Ausser den beiden besonderen Punkten der $\mathfrak{G}$(B), die wir eben benützt haben, nemlich die Spur prim und den unendlich fernen Punkt der Geraden (dessen $\mathfrak{R}'$ die Flucht ist), giebt es noch einen merkwürdigen Punkt der $\mathfrak{G}$(B) nemlich den $\mathfrak{P}$(d) dessen $\mathfrak{St}'$ (ad) $\parallel \mathfrak{T}'$ ist, und dessen $\mathfrak{R}'$ daher in unendlicher Ferne liegt. Durch diesen $\mathfrak{P}$(d) wird die $\mathfrak{G}$(B) in zwei Theile zerlegt, deren einer von d aus durch die Spur prim, nemlich durch $\mathfrak{P}$(b), in's Unendliche führt, und dessen $\mathfrak{R}'$ daher derjenige Theil von B' ist, der von $\mathfrak{P}$(c) aus durch $\mathfrak{P}$(b) ins Undenliche führt.

Wenn daher die $\mathfrak{G}$(B) durch zwei Punkte e, f begrenzt wird, **zwischen** denen $\mathfrak{P}$(d) liegt, so ist der $\mathfrak{R}'$ dieses Stückes (weil der in ihm liegende $\mathfrak{P}$(d) seinen $\mathfrak{R}'$ in unendlicher Ferne hat) nicht das Stück e'f', sondern die ganze Gerade B' **weniger** dem Stücke e'f'.

§. 5.

Aufgaben über Punkte, Gerade und Ebenen, in welchen Entfernungen, Winkel gesucht sind.

76. Aufg. Es sind gegeben die Punkte a und b; man sucht ihre Entfernung, oder, was dasselbe ist, die Länge a b. Fig. 29.

Aufl. 1. Ist (wie in Fig. a. und b.) $\mathfrak{G}(ab) \parallel \mathfrak{T}_1$, so kann man die $\mathfrak{K}_2$ durch a_2 und b_2 gehen lassen (s. 15.); dann liegen die Punkte a und b, also auch die $\mathfrak{G}(ab)$, in der $\mathfrak{T}_1$, und es ist demnach die Länge $ab = a_1 b_1$. Es folgt daher der Satz:

Wenn eine begrenzte Gerade parallel ist zur $\mathfrak{T}_1$, so ist sie gleich ihrem $\mathfrak{R}_1$.

Aufl. 2. Ist (Fig. c. und d.) die $\mathfrak{G}(ab)$ nicht parallel zu einer Tafel, so nimmt man eine neue Tafel (die $\mathfrak{T}_3$) an, die parallel ist, oder, was noch bequemer ist, zusammenfällt mit der $\mathfrak{G}(ab)$ und zugleich auf der $\mathfrak{T}_1$ oder $\mathfrak{T}_2$ senkrecht steht (s. 61. ad 1.), dann ist die Länge der $\mathfrak{G}(ab)$ gleich der ihres $\mathfrak{R}_3$. Ist die $\mathfrak{T}_3 \perp \mathfrak{T}_1$, so nehmen wir die $\mathfrak{K}_2$ so an, dass einer von den gegebenen Punkten, hier der $\mathfrak{P}(a)$, in der $\mathfrak{T}_1$ liegt; geht zugleich die $\mathfrak{T}_3$ durch die $\mathfrak{G}(ab)$, so ist $a_1 b_1$ die $\mathfrak{K}'_1$, und fällt demnach a'_1 mit a_1, b'_1 mit b_1 zusammen. Klappen wir nun die $\mathfrak{T}_3$ so um, dass mit ihr die $\mathfrak{K}'$ nach $\mathfrak{K}'_3$, der in $\mathfrak{K}'$ liegende $\mathfrak{P}(a)$ nach a_3 und der $\mathfrak{K}\mathfrak{R}'$ des $\mathfrak{P}(b)$ nach b'_3 kommt, so kommt b_3 so in die auf $a_3 b'_3$ Senkrechte $b'_3 b_3$, dass die $\mathfrak{D}'_3(b'_3 b_3)$ der Länge und dem Vorzeichen nach gleich der $\mathfrak{D}_2(b_2 b_2)$ ist, *) und es ist dann $a_3 b_3$ die gesuchte Entfernung der Punkte a und b.

Die gesuchte Länge ist daher (wenn $\mathfrak{K}_2$ durch a_2 gelegt wird) die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks, dessen eine Kathete $a_1 b_1$ und dessen andere Kathete $= \mathfrak{A}_1$ des $\mathfrak{P}(b)$. Man kann daher die Länge finden, wenn man $a_1 b_1$ von b_2 aus auf $\mathfrak{K}_2$ aufträgt und von dem dadurch auf $\mathfrak{K}_2$ erhaltenen Punkt nach b_2 misst; also ohne einen Strich zu zeichnen.

Anm. Der Schüler wird gut thun, wenn er die vorliegende Aufgabe auch für den Fall löst, dass die $\mathfrak{T}_3 \perp \mathfrak{T}_2$ ist; er kann alles in dieser Num. Gesagte dazu benützen, wenn er überall 2 mit 1 vertauscht.

Fig. 29. 77. Aufg. Den spitzen Winkel $\mathfrak{W}_1$ zu finden, den die $\mathfrak{G}(ab)$ mit der $\mathfrak{T}_1$, d. h. (nach Anh. 43.) mit ihrem $\mathfrak{R}_1$ bildet.

---

*) Wir machen darauf aufmerksam, dass wir oben (63.) festgesetzt haben, bei einem Umklappen der auf $\mathfrak{T}_1$ senkrechten $\mathfrak{T}_3$ in der hier ausgeführten Weise die $+ \mathfrak{T}'_3$ hinter, die $- \mathfrak{T}'_3$ vor der $\mathfrak{K}'_3$ erscheinen zu lassen.

Aufl. 1. Ist die $\mathfrak{G}(ab) \parallel \mathfrak{T}_1$ (wie in Fig. a.), so ist der Winkel der $\mathfrak{G}(ab)$ mit der $\mathfrak{T}_1 = 0^0$ und fällt, wenn man ihren $\mathfrak{R}_2$ als $\mathfrak{K}$ annimmt, die $\mathfrak{G}(ab)$ zusammen mit ihrem $\mathfrak{R}_1$; es ist daher der Winkel der $\mathfrak{G}(ab)$ mit der $\mathfrak{T}_2$ gleich dem von ihrem $\mathfrak{R}_1$ und der $\mathfrak{K}$ gebildeten Winkel.

Aufl. 2. Ist aber (wie in Fig. c. und d.) die $\mathfrak{G}(ab)$ zu keiner Tafel parallel, so nimmt man, um den $\mathfrak{W}_1$ zu finden, eine $\mathfrak{T}_3$ an, die die $\mathfrak{G}(ab)$ und ihren $\mathfrak{R}_1$ enthält, die also, wie in der vorhergehenden Num., senkrecht auf $\mathfrak{T}_1$ steht, und $a_1 b_1$ zur $\mathfrak{K}'_1$ hat. Lässt man wieder die $\mathfrak{K}_2$ durch a_2 gehen, und klappt die $\mathfrak{T}_3$ so um, dass der $\mathfrak{R}_3$ der $\mathfrak{G}(ab)$ nach $a_3 b_3$ und die $\mathfrak{K}'$ nach $\mathfrak{K}'_3$, also $a_1 b_1$ nach $a_3 b'_3$ kommt, so ist $\measuredangle\, b_3 a_3 b'_3$ der gesnchte $\mathfrak{W}_1$. Es geht demnach aus dieser und der vorhergehenden Num. folgender Satz hervor:

1) Wenn man durch den einen Endpunkt einer $\mathfrak{G}(ab)$, z. B. durch $\mathfrak{P}(a)$, die $\mathfrak{T}_1$ gehen lässt, so kann man ein rechtwinkeliges Dreieck zeichnen, dessen Hypotenuse gleich ab, dessen eine Kathete gleich $a_1 b_1$, dessen zweite Kathete gleich dem $\mathfrak{N}_1$ (oder der $\mathfrak{D}_2$) des $\mathfrak{P}(b)$ ist, und in welchem der Winkel, den die den Geraden ab und $a_1 b_1$ gleichen Seiten einschliessen, gleich dem $\mathfrak{W}_1$ der Geraden ist. Daraus folgt ferner:

2) Wenn zwei begrenzte Gerade gleiche $\mathfrak{W}_1$ haben, so verhalten sich ihre Längen wie die ihrer $\mathfrak{R}_1$; wenn daher

3) zwei Gerade von gleicher Länge gleiche $\mathfrak{R}_1$ haben, so sind ihre $\mathfrak{W}_1$ gleich, und umgekehrt, wenn zwei Gerade von gleicher Länge gleiche $\mathfrak{W}_1$ haben, so etc.; und wenn

4) eine begrenzte Gerade durch Punkte getheilt ist, so ist ihr $\mathfrak{R}_1$ durch die $\mathfrak{R}_1$ dieser Punkte nach demselben Verhältnisse getheilt; ist demnach

5) eine $\mathfrak{G}$(ab) gegeben, und ist c_1 der $\mathfrak{R}_1$ eines $\mathfrak{P}$(c) dieser Geraden, so muss c_2 in $a_2 b_2$ so liegen, dass sich verhält: $a_2 c_2 : a_2 b_2 = a_1 c_1 : a_1 b_1$ *).

Man kann daher die Länge $a_2 c_2$ und mit ihr den $\mathfrak{R}_2(c_2)$ finden, wenn man nach den Regeln der Elementargeometrie zu den Längen $a_1 b_1$, $a_1 c_1$ und $a_2 b_2$ die vierte Proportionallinie sucht. Dieses Verfahren kann man gut anwenden, wenn entweder die Risse der $\mathfrak{G}$(ab) genau oder nahezu $\perp \mathfrak{K}$ sind.

Da in unseren Figuren c und d der $\mathfrak{P}$(a) die $\mathfrak{S}_1$ der $\mathfrak{G}$(ab) ist, so folgt ferner der Satz:

6) Jede Gerade, die durch den $\mathfrak{P}$(b) geht, und deren Spur eins von b_1 so weit entfernt ist, als a_1 von b_1, hat denselben $\mathfrak{W}_1$, wie die $\mathfrak{G}$(ab); es liegen demnach

7) die Spuren eins aller Geraden, die $\mid \mathfrak{P}$(b) und mit der $\mathfrak{T}_1$ denselben $\mathfrak{W}_1$ bilden, in einer in der $\mathfrak{T}_1$ liegenden Kreislinie, deren Mittelpunkt b_1 ist, und deren Halbmesser gleich $a_1 b_1$, d. h. gleich der zweiten Kathete eines rechtwinkeligen Dreieckes ist, dessen eine Kathete gleich dem $\mathfrak{A}_1$ (oder der $\mathfrak{D}_2$) des $\mathfrak{P}$(b), und dessen dieser Kathete gegenüberliegende Winkel gleich $\mathfrak{W}_1$ ist.

Fig. 30. 78. **Aufg.** Es sind gegeben eine $\mathfrak{E}$(abc) und ein $\mathfrak{P}$(d): gesucht die Entfernung des $\mathfrak{P}$(d) von der $\mathfrak{E}$(abc).

Aufl. 1. Liegen (Fig. a) die $\mathfrak{R}_1$ der Punkte a, b, c in einer Geraden A_1, so haben wir die Entfernung des $\mathfrak{P}$(d) von der $\mathfrak{E}(A_1)$ zu suchen. Denken wir uns nun die $\mathfrak{K}_2$ durch d_2 gelegt, so liegt der $\mathfrak{P}$(d) in d_1, und es ist daher der Abstand des $\mathfrak{P}(d_1)$ von der $\mathfrak{G}(A_1)$ die gesuchte Entfernung. Man hat daher den Satz:

Wenn eine Ebene $\perp \mathfrak{T}_1$, so ist der $\mathfrak{R}_1$ eines Punktes von dem $\mathfrak{R}_1$ der Ebene so weit entfernt, als der Punkt selbst von der Ebene.

---

*) Wir haben nemlich schon oft bemerkt, dass unsere Entwickelungen auch wahr sind, wenn wir 1 und 2 mit einander vertauschen.

Aufl. 2. Ist die $\mathfrak{E}$(abc) eine schiefe (wie in Fig. b), so nimmt man eine $\mathfrak{T}_3$ an, auf der sie senkrecht steht; dann ist der $\mathfrak{R}_3$ des $\mathfrak{P}$(d) von dem $\mathfrak{R}_3$ der Ebene so weit entfernt, als die gesuchte Entfernung lang ist. Lassen wir unsere $\mathfrak{T}_3$ zugleich senkrecht stehen auf $\mathfrak{T}_1$ (s. 61. ad 1.), so ist $\mathfrak{K}'$ senkrecht auf der Spur eins der $\mathfrak{E}$(abc). Suchen wir daher diese Spur eins, nemlich die $\mathfrak{G}$(ac), und zeichnen senkrecht dazu die $\mathfrak{K}'_3$, so können wir den $\mathfrak{R}_3$ der $\mathfrak{E}$(abc), nemlich $a_3 b_3$, und den $\mathfrak{R}_3$ des Punktes d finden, und ist dann der Abstand des $\mathfrak{P}(d_3)$ von der $\mathfrak{G}(a_3 b_3)$ die gesuchte Entfernung.

79. Soll die Entfernung einer $\mathfrak{G}$(A) von einer mit ihr parallelen Ebene gesucht werden, so nimmt man in A einen Punkt an und sucht seine Entfernung von der gegebenen Ebene.

Soll die Entfernung zweier paralleler Ebenen gefunden werden, so nimmt man in der einen Ebene einen Punkt an, und sucht seine Entfernung von der anderen Ebene.

80. Aufg. Den spitzen Winkel $\mathfrak{W}_1$ zu finden, den eine $\mathfrak{E}$(abc) mit der $\mathfrak{T}_1$ einschliesst. Fig. 30. *)

Aufl. 1. Liegen die $\mathfrak{R}_1$ (a_1, b_1, c_1) der Punkte a, b, c in einer $\mathfrak{G}(A_1)$ (Fig. a), so haben wir eine $\mathfrak{E}(A_1)$, welche also mit der $\mathfrak{T}_1$ einen rechten Winkel bildet, während der $\mathfrak{W}_2$ der $\mathfrak{E}(A_1)$ gleich dem Winkel ist, den A_1 mit $\mathfrak{K}_1$ einschliesst; denn A_1 und $\mathfrak{K}_1$ sind die Geraden, nach welchen die $\mathfrak{T}_1$ von der $\mathfrak{T}_2$ und der $\mathfrak{E}(A_1)$ geschnitten werden (s. Anh. 44). Es geht hieraus der Satz hervor:

1) Wenn eine Ebene auf der $\mathfrak{T}_1$ senkrecht steht, so bildet der $\mathfrak{R}_1$ der Ebene mit der $\mathfrak{K}_1$ denselben Winkel, wie die Ebene mit der $\mathfrak{T}_2$.

Aufl. 2. Ist die $\mathfrak{E}$(abc) eine schiefe (Fig. b), so nimmt man eine $\mathfrak{T}_3$ an, die auf der $\mathfrak{T}_1$ und auf der $\mathfrak{E}$(abc), also auch auf der Spur eins der $\mathfrak{E}$(abc) senkrecht steht und es ist dann (nach vorstehendem Satz) der $\mathfrak{W}_1$ der $\mathfrak{E}$(abc) gleich dem Winkel, den der $\mathfrak{R}_3$ dieser Ebene mit der $\mathfrak{K}'_3$ einschliesst. Sucht man daher den $\mathfrak{R}_3(a_3 b_3)$ der $\mathfrak{E}$(abc), so ist $\measuredangle\, b_3 a_3 b'_3$ der gesuchte $\mathfrak{W}_1$.

Aus unserer Construktion geht hervor, dass in dem rechtwinkeligen Dreiecke $a_3 b_3 b'_3$ die Länge $b'_3 b_3$, d. i. die $\mathfrak{D}'_3$ des

---

*) Für die vorliegende Aufgabe ist der $\mathfrak{P}$(d) überflüssig.

$\mathfrak{P}(b) = \mathfrak{b}_2 b_2$ (d. i. $= \mathfrak{D}_2$ oder $\mathfrak{A}_1$ des $\mathfrak{P}(b)$; ferner, dass $a_3 b'_3$ der Entfernung des $\mathfrak{R}_1(b_1)$ von der Spur eins der $\mathfrak{E}(abc)$ ist. Demnach erhalten wir folgenden Satz:

2) Der $\mathfrak{W}_1$ einer $\mathfrak{E}(abc)$ liegt in einem rechtwinkeligen Dreieck, dessen eine Kathete gleich dem Abstande des $\mathfrak{R}_1$ eines $\mathfrak{P}(b)$ der $\mathfrak{E}(abc)$ von ihrer Spur eins und dessen andere Kathete gleich der $\mathfrak{D}_2$ dieses $\mathfrak{P}(b)$ ist, der letzteren Kathete gegenüber. Daraus folgt ferner:

3) Hat man eine zweite Ebene, die ebenfalls $|\,\mathfrak{P}(b)$ und von deren Spur eins der $\mathfrak{P}(b_1)$ eben so weit als von der Spur eins der $\mathfrak{E}(abc)$ absteht, so ist der $\mathfrak{W}_1$ dieser zweiten Ebene gleich dem der $\mathfrak{E}(abc)$, und umgekehrt: geht eine zweite Ebene durch den $\mathfrak{P}(b)$ und ist ihr $\mathfrak{W}_1$ etc.

4) Ist von einer Ebene ein $\mathfrak{P}(b)$ und ihr $\mathfrak{W}_1$ gegeben, so ist die Spur eins der Ebene eine Tangente an einem in der $\mathfrak{T}_1$ gezeichneten Kreise, dessen Mittelpunkt b_1 und dessen Halbmesser die Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks ist, dessen eine Kathete die $\mathfrak{D}_2$ des $\mathfrak{P}(b)$ und dessen dieser Kathete gegenüberliegender Winkel gleich $\mathfrak{W}_1$ ist.

Fig. 31. 81. Aufg. Es sind gegeben zwei sich kreuzende Gerade A, B; gesucht ihre Entfernung.

Aufl. Man findet (nach Anh. 42.) diese Entfernung, wenn man eine $\mathfrak{E}(AC)$ annimmt, welche $|\,\mathfrak{G}(A)$ und $\|\,\mathfrak{G}(B)$ (s. 49.), und (nach 78.) die Entfernung eines $\mathfrak{P}(a)$ der $\mathfrak{G}(B)$ von der $\mathfrak{E}(AC)$ aufsucht.

Fig. 33. 82. Aufg. Die Entfernung eines $\mathfrak{P}(a)$ von einer $\mathfrak{G}(A)$ zu finden.

Aufl. Alle Aufgaben, in denen Entfernungen oder Winkel von Dingen gesucht werden, die in einer Ebene liegen, können wir dadurch lösen, dass wir diese Ebene als $\mathfrak{T}_3$ betrachten, und nach deren Umklappung die $\mathfrak{R}_3$ der gegebenen Dinge suchen. Diese $\mathfrak{R}_3$ geben dann dieselben Entfernungen und Winkel, wie die Dinge selbst.

Suchen wir daher (unter Voraussetzung, dass wir die $\mathfrak{T}_3$ und $\mathfrak{T}_1$ als neues Tafelsystem ansehen) die Spur eins der $\mathfrak{E}(Aa)$, so ist dies die $\mathfrak{K}'$. Klappen wir die $\mathfrak{T}_3$ um $\mathfrak{K}'$ um, und suchen den $\mathfrak{R}_3$ des $\mathfrak{P}(a)$ und den $\mathfrak{R}_3$ der $\mathfrak{G}(A)$, so ist die Entfernung dieser $\mathfrak{R}_3$ die verlangte Länge. Der $\mathfrak{R}_3$ von a ist a selbst (weil hier a in $\mathfrak{K}'$ liegt); um den $\mathfrak{R}_3$ von $\mathfrak{G}(A)$ zu erhalten, suchen wir den $\mathfrak{R}_3$ eines $\mathfrak{P}(c)$ der $\mathfrak{G}(A)$, indem wir auf das $\mathfrak{K}\mathfrak{L}'_3$ des $\mathfrak{P}(c)$ von c' aus dessen $\mathfrak{D}'_3$ auftragen. Diese $\mathfrak{D}'_3$ ist aber (nach 68.) die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks, dessen Katheten die $\mathfrak{D}'_1$ und der $\mathfrak{A}_1$ des Punktes ist. Da noch der $\mathfrak{R}_3$ des (in der $\mathfrak{K}'$ liegenden) $\mathfrak{P}(b)$ der $\mathfrak{G}(A)$ der $\mathfrak{P}(b)$ selbst ist, so ist $b_3 c_3$ der $\mathfrak{R}_3$ der $\mathfrak{G}(A)$.

Aufg. Die wahre Gestalt eines ebenen Polygons zu finden. Fig. 32.

Aufl. Ist das Polygon ein Dreieck, so giebt man zu seiner Bestimmung die Risse seiner Eckpunkte. Hat es aber mehr als 3 Ecken, so kann man nur drei Eckpunkte desselben (hier die Punkte a, b, c) vollständig durch ihre Risse eins und zwei bestimmen, von den übrigen Ecken aber kann man nur ihre $\mathfrak{R}_1$ (oder $\mathfrak{R}_2$) geben, da sie noch die Bedingung zu erfüllen haben, in der $\mathfrak{E}(abc)$ zu liegen.

Wollte man nun zunächst die $\mathfrak{R}_2$ der Punkte d, e suchen, so würde man nur zu berücksichtigen haben, dass der $\mathfrak{P}(d)$ in der $\mathfrak{G}(d_1)$ und in der $\mathfrak{E}(abc)$ liegt, daher der Schnittpunkt von $\mathfrak{G}(d_1)$ und $\mathfrak{E}(abc)$ ist. Sucht man diesen Schnittpunkt (nach 45.), so erhält man d_2; in ähnlicher Weise auch e_2. Hält man sich aber streng an die vorliegende Aufgabe, die blos die wahre Gestalt des Polygons abcde verlangt, so kommen wir durch den oben bezeichneten Gang auch ohne d_2 und b_2 zum Ziele.

Betrachten wir $\mathfrak{E}(abc)$ als $\mathfrak{T}_3$, die mit der $\mathfrak{T}_1$ das neue Tafelsystem bildet, so ist die Spur eins der $\mathfrak{E}(abc)$ die $\mathfrak{K}'$. Klappen wir nun die $\mathfrak{T}_3$ um diese $\mathfrak{K}'$ um, und zeichnen die $\mathfrak{R}_3$ der Punkte a, b, c, indem wir auf die $\mathfrak{K}\mathfrak{L}'_3$ dieser Punkte die aus ihren Nebenfiguren (z. B. rechtwinkeliges Dreieck $\mathfrak{b}' b_1 b$) erhaltenen $\mathfrak{D}'_3$ auftragen, so haben wir nur noch die $\mathfrak{R}_3$ derjenigen Punkte (d, e) zu suchen, von denen die $\mathfrak{R}_2$ fehlen. Dies ist aber leicht ausführbar; denn von einem solchen Punkte, z. B. $\mathfrak{P}(d)$ können wir die Nebenfigur finden, da $\mathfrak{d}' d_1$ deren eine Kathete ist, und

ausserdem der $\angle\, \alpha'$ derselben durch die Nebenfigur des $\mathfrak{P}(b)$ erhalten worden ist. Man kann demnach auch die $\mathfrak{R}_3(d_3, e_3)$ der Punkte d und e und somit den $\mathfrak{R}_3$ und daher die wahre Gestalt des Polygons erhalten.

Anm. 1. In derselben Weise wird auch die Aufgabe gelöst, den Winkel zweier Geraden a c, b c (die sich also in c schneiden) zu finden. Wir suchen wieder (die $\mathfrak{E}(abc)$ als $\mathfrak{T}_3$ betrachtet) die $\mathfrak{R}_3$ der $\mathfrak{G}(ac)$ und $\mathfrak{G}(bc)$ und erhalten den $\angle\, (a_1 c_3 b_1)$ als den gesuchten. Ist aber der Winkel von zwei sich kreuzenden Geraden A, B verlangt, so verschiebt man die eine, z. B. A, bis sie die andere schneidet, und sucht nun den Winkel dieser sich schneidenden Geraden.

Anm. 2. Da der spitze Winkel, den eine $\mathfrak{G}(A)$ mit einer Ebene und der Winkel, den die $\mathfrak{G}(A)$ mit einem Loth zur Ebene bildet, zusammen einen Rechten geben (Anh. 43.), so findet man den spitzen Winkel einer $\mathfrak{G}(ab)$ mit einer $\mathfrak{E}(AB)$, wenn man durch den $\mathfrak{P}(a)$ eine $\mathfrak{G}(C) \perp \mathfrak{E}(AB)$ legt, den von $\mathfrak{G}(ab)$ und $\mathfrak{G}(C)$ gebildeten spitzen Winkel aufsucht, und ihn zu einem Rechten ergänzt; der Ergänzungswinkel ist gleich dem gesuchten.

Fig. 34.

83. Aufg. Den Winkel zweier Ebenen zu finden.

Aufl. 1. Stehen die beiden Ebenen senkrecht auf e i n e r Tafel, so bilden ihre Risse auf dieser Tafel denselben Winkel, wie die Ebenen (Anh. 44.).

Aufl. 2. Stehen sie nicht beide $\perp$ auf e i n e r Tafel, oder stehen beide schief gegen die Tafeln, wie die $\mathfrak{E}(abc)$ und die $\mathfrak{E}(abd)$, so nimmt man eine $\mathfrak{T}_3$ an, die auf beiden Ebenen, also auch auf ihrem Schnitte a b, senkrecht steht, und es bilden dann die $\mathfrak{R}_3$ der Ebenen den gesuchten Winkel. Lässt man hier die $\mathfrak{K}_2$ durch a_2 und die $\mathfrak{K}'$ durch a_1 gehen, so liegt der $\mathfrak{P}(a)$ in der $\mathfrak{K}'$ und fällt, wenn man der $\mathfrak{T}_3$ und $\mathfrak{T}_1$ die $\mathfrak{K}'$ gemeinschaftlich lässt, a_3 mit a_1 zusammen; da ferner die $\mathfrak{G}(ab)$ das $\mathfrak{L}_3'$ des $\mathfrak{P}(a)$ uud $\mathfrak{P}(b)$ ist, so liegt auch b_3 in a_1. Um aber in der umgeklappten $\mathfrak{T}_3$ die $\mathfrak{R}_3$ (c_3 und d_3) der Punkte c, d zu erhalten, müssen wir so verfahren, wie wir oben (72. 2)) gezeigt haben. Wir klappen nemlich die $\mathfrak{L}\mathfrak{E}'$ der Punkte a und b um, und zwar so, dass $a_1 b_1$ (Fig. a.) nach $a b_1$ (Fig. b) und der $\mathfrak{P}(b)$ nach b kommt, wenn die auf $a b_1$ Senkrechte $b b_1 = b_2 b_2$ gemacht wird. Demnach ist $a c_3$ ($\perp$ ab) das $+$ $\mathfrak{K}\mathfrak{L}_3'$ und wenn man $a b_1$

als $+ \mathfrak{R}\mathfrak{L}'_1$ annimmt $\bigwedge b_1 a c_3$ der $\bigwedge \alpha'$. Trägt man nun $c_1 c'$ nach $a c_1$ (auf das $- \mathfrak{R}\mathfrak{L}'_1$, weil $c_1 c'$ negativ ist) und macht die auf $a c_1$ Senkrechte $c c_1 = c_2 c_2$ und positiv, so erhält man durch die zu $a c_3$ Senkrechte $c c_3$ die $\mathfrak{D}'_3(ac_3)$, welche hier $+$ ist. Trägt man daher $a c_3$ nach $c' c_3$, so erhält man den $\mathfrak{R}_3$ des $\mathfrak{P}(c)$; in ähnlicher Art wird der $\mathfrak{R}_3(d_3)$ erhalten. Dann ist der $\bigwedge c_3 a_3 d_3$, den die $\mathfrak{R}_3$ ($c_3 a_3$ und $d_3 a_3$) der gegebenen Ebenen einschliessen, der gesuchte Winkel.

Anm. Wäre der Durchschnitt der gegebenen Ebenen nicht bekannt, so müsste man ihn suchen und dann wie oben verfahren.

§. 6.

Aufgaben über Punkte, Gerade und Ebenen, in welchen Entfernungen und Winkel gegeben sind.

84. Bei der Auflösung dieser Aufgaben nimmt man am Zweckmässigsten Tafeln zu Hilfe, in welchen die gegebenen Entfernungen und Winkel unmittelbar aus den Rissen gemessen werden können. Insbesondere nimmt man für den Fall, dass die gegebenen und gesuchten Raumgrössen alle in einer Ebene liegen, (also für alle planimetrischen Aufgaben, deren Punkte und Linien durch Risse gegeben sind), am Besten eine $\mathfrak{T}_3$ zu Hilfe, die alles Gegebene und Gesuchte enthält (zugleich lässt man diese $\mathfrak{T}_3$, wenn für sie nur eine einzige Gerade A gegeben ist, senkrecht stehen auf einer alten Tafel, z. B. der $\mathfrak{T}_1$, so dass A_1 die $\mathfrak{K}'$ ist), zeichnet, nach Umklappung der $\mathfrak{T}_3$ die $\mathfrak{R}_3$ aller Punkte und Linien, und sucht nun die verlangten Punkte in der $\mathfrak{T}_3$ nach den Regeln der Planimetrie. Die so gefundenen Punkte sind dann die $\mathfrak{R}_3$ der verlangten, aus denen man nur noch die $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ zu suchen hat.

85. Aufg. Es ist gegeben eine $\mathfrak{G}(A)$ und ein $\mathfrak{P}(a)$ in ihr; man sucht einen $\mathfrak{P}(b)$ der $\mathfrak{G}(A)$, der vom $\mathfrak{P}(a)$ eine gegebene Entfernung hat. Fig. 35.

Aufl. Diese Aufgabe ist planimetrisch; man nimmt daher eine $\mathfrak{T}_3$ zu Hilfe, welche die $\mathfrak{G}(A)$ enthält, und die zugleich auf der $\mathfrak{T}_1$ (oder auf der $\mathfrak{T}_2$) senkrecht steht, so dass also A_1 die

neue Kante ($\mathfrak{K}'$) ist. Klappt man nun die Tafeln so um, dass die $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_3$ die $\mathfrak{K}'$ gemein behalten, und lässt wieder die $\mathfrak{K}_2$ durch a_2 gehen, so ist a ein Punkt der $\mathfrak{K}'$ und fällt demnach a_3 mit a_1 zusammen. Um nun den $\mathfrak{R}_3$ der Geraden A zu finden, muss man von einem zweiten Punkt der $\mathfrak{G}$(A), z. B. vom $\mathfrak{P}$(c) den $\mathfrak{R}_3$ suchen (s. 64.), und es ist die durch a_1 und c_3 gehende A_3 der $\mathfrak{R}_3$ der $\mathfrak{G}$(A). Nun löst man in der $\mathfrak{T}_3$ die gegebene Aufgabe, indem man von a_1 aus die gegebene Länge aufträgt, und so den $\mathfrak{R}_3(c_3)$ des verlangten Punktes erhält. Schliesslich sucht man noch auf bekannte Art aus c_3 die Risse c_1 und c_2.

Anm. Da $\mathfrak{b}b_2 = b_1b_3$ sein muss (s. 63. Satz), so hat man ein Mittel, sich von der Genauigkeit der Zeichnung zu überzeugen.

Fig. 30. 86. Aufg. Es ist gegeben eine $\mathfrak{E}$(abc); gesucht ein $\mathfrak{P}$(d), der von der $\mathfrak{E}$(abc) eine gegebene Entfernung hat.

Aufl. Diese Aufgabe liesse sich sofort lösen, wenn die $\mathfrak{E}$(abc) $\perp \mathfrak{T}_1$ (Fig. a.) wäre. Denn in diesem Falle dürfte der $\mathfrak{P}$(d) nur so gewählt werden, dass d_1 vom $\mathfrak{R}_1$ der Ebene um die gegebene Entfernung absteht. Hiebei ist ersichtlich, dass es unzählige Punkte d giebt, die alle die verlangte Bedingung erfüllen, und zusammen in zwei zur gegebenen parallelen Ebenen liegen, deren $\mathfrak{R}_1$ mit dem $\mathfrak{R}_1$ der gegebenen Ebene in der gegebenen Entfernung parallel laufen.

Ist aber (wie in Fig. b) die $\mathfrak{E}$(abc) keine Lothebene, so nimmt man hier wieder (wie in 78., wo die umgekehrte Aufgabe gelöst wurde) eine $\mathfrak{T}_3$ an, die auf der Spur eins der $\mathfrak{E}$(abc) senkrecht steht, so ist a_3b_3 der $\mathfrak{R}_3$ dieser Ebene, und wenn daher d_3 von diesem $\mathfrak{R}_3$ so weit absteht, als die gegebene Entfernung (des $\mathfrak{P}$(d) von der $\mathfrak{E}$(abc)) beträgt, so ist d_3 des $\mathfrak{R}_3$ des $\mathfrak{P}$(d), dessen $\mathfrak{R}_1$ nemlich d_1, in seinem $\mathfrak{KL}_1$ beliebig angenommen werden kann. Wie man aber d_2 aus d_1 und d_3 findet, ist schon bekannt (s. 64.).

Anm. Legt man durch den $\mathfrak{P}$(d) eine $\mathfrak{E}$(def), welche $\parallel \mathfrak{E}$(abc) (s. 52. 1.), so ist jeder Punkt und jede Gerade derselben eben so weit von der $\mathfrak{E}$(abc)) entfernt, als der $\mathfrak{P}$(d). Es giebt aber noch eine Ebene, die diese Eigenschaft an sich trägt, nemlich eine Ebene, die mit der $\mathfrak{E}$(def) auf verschiedenen Seiten der $\mathfrak{E}$(abc) liegt.

87. Aufg. Es wird eine $\mathfrak{G}(ab)$ gesucht, von der ein $\mathfrak{P}(a)$, Fig. 29.c.
ihr $\mathfrak{R}_1$, nemlich $a_1 b_1$, und der spitze Winkel $\mathfrak{W}_1$ gegeben ist, den sie mit der $\mathfrak{T}_1$ einschliesst.

Aufl. Nimmt man wieder die $\mathfrak{K}_2$ so an, dass der $\mathfrak{P}(a)$ in der $\mathfrak{T}_1$ liegt, so ist von dem früher (77.) angeführten rechtwinkeligen Dreieck der Winkel $\mathfrak{W}_1$ und die diesem Winkel anliegende Kathete, welche gleich $a_1 b_1$ ist, bekannt, und es lässt sich daraus die dem $\mathfrak{W}_1$ gegenüberstehende Kathete $b_2 b_2$ finden, welche gleich der $\mathfrak{D}_2$ des $\mathfrak{P}(b)$ ist, und wodurch der $\mathfrak{R}_2(a_2 b_2)$ der $\mathfrak{G}(ab)$ gefunden ist.

Anm. Da hier nicht ausgesprochen ist, in welchem Raume der $\mathfrak{T}_1$ der $\mathfrak{P}(b)$ liegen soll, so kann die durch das rechtwinkelige Dreieck $a_3 b_3 b'_3$ erhaltene $\mathfrak{D}_2$ des $\mathfrak{P}(b)$ auch in der — $\mathfrak{T}_2$ aufgetragen werden; es giebt also zwei Gerade, die den gegebenen Bedingungen entsprechen.

88. Aufg. Es sind gegeben die Spur eins (ae) einer Ebene Fig. 30.b.
und ihr $\mathfrak{W}_1$; gesucht die Ebene.

Aufl. Da dies die umgekehrte Aufgabe einer früheren (80.) ist, so wird man, wie dort, eine $\mathfrak{T}_3$ zu Hilfe nehmen, die auf der Spur eins (ae) senkrecht steht, und den $\mathfrak{R}_3$ der gesuchten Ebene aufsuchen. Dieser muss, wenn $\mathfrak{K}'$ die neue Kante ist, durch a_3 gehen und mit $\mathfrak{K}'$ den gegebenen $\mathfrak{W}_1$ bilden; es ist also die Gerade $a_3 b_3$ (oder eine zweite Gerade, die auf der anderen Seite der Linie $a_1 a_3$ mit der $\mathfrak{K}'$ den $\mathfrak{W}_1$ einschliesst) der $\mathfrak{R}_3$ der gesuchten Ebene, und demnach der $\mathfrak{P}(b)$ ein Punkt derselben, wenn b_3 im $\mathfrak{R}_3$ der Ebene liegt, und dessen $\mathfrak{D}_2$ der Länge und dem Vorzeichen nach $=$ seinem $\mathfrak{D}'_3$ ist; sein $\mathfrak{D}'_1$ ist willkührlich (s. die Sätze in 29. und 63.)

89. Aufg. Es sind beliebig viele Punkte a, b, c, d gegeben; Fig. 37.
man soll die $\mathfrak{R}_3$ dieser Punkte finden, wenn die $\mathfrak{T}_3$ die Punkte a, b, c enthält, dieselbe also zusammenfällt mit der $\mathfrak{E}(abc)$.

Aufl. Zur Lösung dieser Aufgabe suchen wir (nach 72.) die Spur eins (ae) der $\mathfrak{E}(abc)$, welche Spur die $\mathfrak{K}'$ vorstellt. Klappen wir nun die $\mathfrak{T}_3$ um und zwar hier so, dass die $\mathfrak{K}'$

zweimal erscheint, einmal als $\mathfrak{K}'_1$ (weshalb wir an die Spur eins der $\mathfrak{E}(abc)$ nicht $\mathfrak{K}'$, sondern $\mathfrak{K}'_1$ geschrieben haben) und einmal als $\mathfrak{K}'_3$, und nehmen wir an, es komme der $\mathfrak{R}_3$ des (in $\mathfrak{K}'$ liegenden) $\mathfrak{P}(a)$ nach a_3 in der $\mathfrak{K}_3$, so finden wir das $\mathfrak{K}\mathfrak{L}'_3$ eines Punktes, z. B. des $\mathfrak{P}(b)$, wenn wir die $\mathfrak{A}b'_3$ $(a_3 b'_3)$ des Punktes $= \mathfrak{A}b'_1 (a_1 b'_1)$ machen (und so auftragen, dass wenn man die Tafeln $\mathfrak{T}_3$ und $\mathfrak{T}_1$ verschoben denkt, bis a_3 auf a_1 und b'_3 auf b'_1 fällt, die $+\ \mathfrak{T}'_1$ und $+\ \mathfrak{T}'_3$ auf verschiedenen Seiten der $\mathfrak{K}'$ erscheinen), und in b'_3 das $\mathfrak{K}\mathfrak{L}'_3$ errichten. Um aber noch für jeden Punkt die $\mathfrak{D}'_3$ zu erhalten, brauchen wir seine Nebenfigur. Da nun der $\measuredangle\, \alpha'$ nicht gegeben ist, so verfahren wir (nach 72.) so, dass wir mit der Nebenfigur des Punktes b (oder c) beginnen, die ein rechtwinkeliges Dreieck $b' b_1 b$ (Fig. b) ist, in welchem $\measuredangle\, b_1 b' b = \measuredangle\, \alpha'$ ist (da hier unserer Annahme zufolge die Schenkel dieses Winkels die positiven $\mathfrak{K}\mathfrak{L}'$ sind). Haben wir so den $\measuredangle\, \alpha'$ gefunden, so können wir die Nebenfigur eines jeden Punktes, z. B. des Punktes d dadurch finden, dass wir seine aus Figur a zu entnehmenden $\mathfrak{D}'_1$ und $\mathfrak{A}_1$ mit Berücksichtigung ihres Vorzeichens in die Fig. b übertragen, wodurch wir in dieser Figur zuerst d_1, dann d erhalten, und dann durch die zu $\mathfrak{K}\mathfrak{L}'_3$ errichtete Senkrechte $d d_3$ die Figur vollenden (welche, wenn der Punkt in der $\mathfrak{T}_3$, z. B. $\mathfrak{P}(c)$, ein rechtwinkeliges Dreieck wird). Auf diese Art erhalten wir die $\mathfrak{D}'_3$ $(b' b_3, b' c_3, b' d_3)$ aller Punkte, die wir dann in die Fig. a. auf die betreffenden $\mathfrak{K}\mathfrak{L}'_3$ mit Berücksichtigung ihres Vorzeichens übertragen. Wir erhalten so in unserer Figur die $\mathfrak{R}_3$ unserer Punkte.

Anm. Wir haben hier die Fig. b gegen die $\mathfrak{R}_3$ in der Fig. a so gelegt, dass die Punkte b', b, c, d der ersteren Figur augenscheinlich als die $\mathfrak{R}_4$ der Punkte (a, b, c, d) angesehen werden können (s. 70. Anm.)

Fig. 37. 90. Aufg. Einen Punkt e zu finden, der in der $\mathfrak{E}(abc)$ liegt, und gegen die Punkte a, b, c eine bestimmte Lage hat.

Aufl. Wie auch die Bedingungen, durch welche die Lage des $\mathfrak{P}(e)$ gegen die gegebenen Punkte der $\mathfrak{E}(abc)$ bestimmt ist, lauten mögen, der Gang, den die Lösung unserer Aufgabe zu nehmen hat, und der an der Spitze unseres §. schon angedeutet wurde, ist folgender:

Man betrachtet die $\mathfrak{E}(abc)$ als $\mathfrak{T}_3$, die mit $\mathfrak{T}_1$ (oder $\mathfrak{T}_2$) das neue Tafelsystem bildet, und sucht die Spur eins der $\mathfrak{E}(abc)$, welche die $\mathfrak{K}'$ vorstellt. Nun klappen wir die $\mathfrak{T}_3$ um, und zeichnen mit Hilfe der Nebenfiguren der gegebenen Punkte die $\mathfrak{R}_3$ dieser Punkte. Da jetzt alle gegebenen Punkte in der Ebene unseres Blattes liegen, so können wir den $\mathfrak{P}(e)$ nach den Regeln der Planimetrie suchen, und dieser Punkt ist dann zugleich der $\mathfrak{R}_3$ des $\mathfrak{P}(e)$. Man hat nun noch mittelst der Nebenfigur des Punktes e, von welcher die Hypotenuse und der $\measuredangle\, \alpha'$ bekannt sind, e_1 und e_2 zu finden.

In unserer Figur haben wir angenommen, es seien die Entfernungen des $\mathfrak{P}(e)$ von a und b bekannt. In diesem Falle müssen wir mit diesen Entfernungen aus a_3 und b_3 Kreisbögen zeichnen, deren Schnitt d_3 ist. Es gäbe daher zwei Punkte, die e_3 vorstellen können, wenn nicht durch eine weitere Bedingung, z. B. dass e und c auf einerlei Seite von a b liegen sollen (dies ist in unserer Figur vorausgesetzt und daher nur ein einziges e_3 gezeichnet), die Zweideutigkeit gehoben wird.

Anm. Der Schüler wird gut thun, zu seiner Uebung sich andere planimetrische Aufgaben zur Lösung vorzulegen; z. B. die Aufgabe: Den Mittelpunkt d eines Kreises (nicht den Kreis, sondern nur seinen Mittelpunkt) zu finden, dessen Peripherie durch die Punkte a, b, c geht.

91. Es ist gegeben eine $\mathfrak{E}(abc)$ und eine in ihr liegende $\mathfrak{G}(ab)$; gesucht eine $\mathfrak{E}(abd)$, die mit $\mathfrak{E}(abc)$ einen gegebenen Winkel bildet. Fig. 34.

Aufl. Man nimmt wieder (wie in 83., wo die umgekehrte Aufg. von der vorliegenden gelöst wurde) eine $\mathfrak{T}_3$ an, die $\perp \mathfrak{G}(ab)$, und sucht die $\mathfrak{R}_3$ der Punkte a, b und c, wobei wieder, wenn $\mathfrak{K}_2$ durch a_2 und $\mathfrak{K}'$ durch a_1 gelegt wird, die $\mathfrak{R}_3$ der Punkte a und b mit a_1 zusammenfallen, und daher $a_1 c_3$ der $\mathfrak{R}_3$ der $\mathfrak{E}(abc)$ ist. Demnach ist der $\mathfrak{R}_3$ der $\mathfrak{E}(abd)$ eine $\mathfrak{G}(a_1 d_3)$, die mit $a_1 c_3$ den gegebenen Winkel der Ebenen einschliesst. Da man nun die Risse der Punkte a und b schon hat, so braucht man nur noch von einem dritten Punkte d der $\mathfrak{E}(abd)$ den $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ aufzusuchen, dessen $\mathfrak{R}_3$ in der $\mathfrak{G}(a_1 d_3)$ liegt, und dessen $\mathfrak{R}_1$ in dem $\mathfrak{RL}'_1$, nemlich $\mathfrak{d}' d_1$, beliebig angenommen werden kann.

Sucht man nun mit Hilfe der Nebenfigur des $\mathfrak{P}(d)$ seinen $\mathfrak{A}_1$ und macht seine $\mathfrak{D}_2$, nemlich $\mathfrak{d}_2 d_2, = d_1 d$, so erhält man d_2.

Anm. Wenn der Winkel der beiden Ebenen kein Rechter ist, so giebt es zwei Ebenen, die die gegebenen Bedingungen erfüllen.

92. Aufg. Den Winkel zweier Ebenen, die sich nach einer $\mathfrak{G}(ab)$ schneiden, durch eine Ebene zu halbiren.

Aufl. Man sucht mit Hilfe einer $\mathfrak{T}_3$, die $\perp \mathfrak{G}(ab)$, den Winkel α der beiden Ebenen (s. 83.), und sucht dann (nach 91.) eine Ebene, die mit jeder der gegebenen Ebenen einen Winkel $= \frac{\alpha}{2}$ einschliesst, und durch ab geht.

Anm. Sind die Ebenen von allen Seiten unbegrenzt, so bilden sie vier Winkel, und es giebt zwei Ebenen, die ihre Winkel halbiren.

Fig. 38. 93. Aufg. Es wird eine $\mathfrak{G}(ad)$ gesucht, die in einer $\mathfrak{E}(abc)$ liegt, und mit der $\mathfrak{T}_1$ einen gegebenen Winkel $\mathfrak{W}_1$ einschliesst.

Aufl. Da die $\mathfrak{G}(ad)$ durch den $\mathfrak{P}(a)$ geht und mit der $\mathfrak{T}_1$ den gegebenen Winkel $\mathfrak{W}_1$ einschliesst, so muss (nach 77. Satz 7.) die Spur eins der $\mathfrak{G}(ad)$ in einer Kreislinie liegen, die aus a_1 mit einem Halbmesser beschrieben wird, der gleich der Kathete $a'_3 d_3$ eines rechtwinkeligen Dreiecks $a'_3 d_3 a_3$ ist, in welchem die andere Kathete $a'_3 a_3 = a_2 a_2$ und der dieser Kathete gegenüberstehende Winkel gleich ist $\mathfrak{W}_1$ oder $180^0 - \mathfrak{W}_1$ (je nachdem $\mathfrak{W}_1$ spitz oder stumpf ist). Da aber ausserdem die Spur eins der $\mathfrak{G}(ad)$ in der Spur eins der $\mathfrak{E}(abc)$ liegen muss, so sucht man diese Spur eins (ce) der $\mathfrak{E}(abc)$ (zu welchem Ende man die $\mathfrak{K}_2$ durch c_2 gehen lässt), und der $\mathfrak{P}(d_1)$, in welchem $\mathfrak{G}(c_1 e_1)$ von der oben genannten Kreislinie geschnitten wird, ist dann die Spur eins der gesuchten $\mathfrak{G}(ad)$.

Anm. 1. Es giebt daher so viele $\mathfrak{G}(ad)$, als die genannte Kreislinie mit der Spur $c_1 e_1$ Punkte gemein hat, also zwei (wie in unserer Figur, wo aber die zweite Gerade nicht gezeichnet ist) oder eine (wenn $a_1 d_1 \perp c_1 e_1$) oder keine (wenn der Halbmesser des Kreises kleiner ist als die Entfernung des $\mathfrak{P}(a_1)$ von $\mathfrak{G}(c_1 e_1)$).

Anm. 2. Wäre statt $\mathfrak{W}_1$ der spitze Winkel α gegeben, den die $\mathfrak{G}(ad)$ mit der $\mathfrak{G}(a_1)$ einschliesst, so könnte man durch

$90^0 - \alpha$ den $\mathfrak{W}_1$ der $\mathfrak{G}(ad)$ erhalten, und dann wie oben verfahren Man hätte daher in diesem Falle von dem rechtwinkeligen Dreiecke $a_3 d_3 a'_3$ den $\measuredangle a_3$ statt des Winkels d_3.

94. Aufg. Es sind gegeben ein $\mathfrak{E}(abc)$ und eine durch den $\mathfrak{P}(a)$ gehende $\mathfrak{G}(A)$; gesucht eine $\mathfrak{G}(af)$, die in der $\mathfrak{E}(abc)$ liegt und mit der $\mathfrak{G}(A)$ einen gegebenen Winkel β bildet. Fig. 39.

Aufl. Stände die $\mathfrak{G}(A) \perp \mathfrak{T}_1$, so hätte man die vorhergehende Aufg. Da aber die $\mathfrak{G}(A)$ schief steht, so nehmen wir eine $\mathfrak{T}_3$ an, die $\perp \mathfrak{G}(A)$, deren $\mathfrak{K}'$ also $\perp A_1$ ist, und suchen (nach 93., wenn man 3 statt 1 setzt) die Spur drei (abgekürzt: $\mathfrak{S}_3$) der $\mathfrak{G}(af)$; diese $\mathfrak{S}_3$ muss in der $\mathfrak{S}_3$ der $\mathfrak{E}(abc)$ so liegen, dass sie von dem $\mathfrak{R}_3$ des $\mathfrak{P}(a)$ so weit absteht, als die Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks lang ist, dessen andere Kathete gleich dem $\mathfrak{A}_3$ des $\mathfrak{P}(a)$ ist und mit seiner Hypotenuse den $\measuredangle \beta$ einschliesst. Da man demnach die $\mathfrak{S}_3$ der $\mathfrak{E}(abc)$ aufsuchen muss, so ist es zweckmässig, die $\mathfrak{K}_2$ durch b_2 und die $\mathfrak{K}'$ durch b_1 zu legen, so dass der $\mathfrak{P}(b)$ der $\mathfrak{K}'$ und daher auch der $\mathfrak{T}_3$ angehört, und demnach ein Punkt der $\mathfrak{S}_3$ der $\mathfrak{E}(abc)$ ist. Klappen wir daher die $\mathfrak{T}_3$ um $\mathfrak{K}'$ um, so fällt b und b_3 mit b_1 zusammen, und ist demnach b_1 ein Punkt der $\mathfrak{S}_3$ der $\mathfrak{E}(abc)$. Sucht man noch den $\mathfrak{R}_3(a_3)$ des Punktes a (und des $\mathfrak{P}(d)$), und den des $\mathfrak{P}(c)$, so wird man mit Hilfe einer $\mathfrak{T}_4$ die $\mathfrak{S}_3(e_3)$ der $\mathfrak{G}(ac)$ und mithin $b_1 e_3$, die $\mathfrak{S}_3$ der $\mathfrak{E}(abc)$, finden. Nimmt man nun in dieser $\mathfrak{S}_3$ einen Punkt f_3, der von a_3 so weit entfernt ist, als $a_3 f_3$ (Fig. b) angiebt, so ist f_3 die $\mathfrak{S}_3$ der gesuchten Geraden. Sucht man noch aus f_3 die Risse f_1 und f_2, so hat man die $\mathfrak{G}(af)$.

95. Aufg. Es wird eine $\mathfrak{E}(abc)$ gesucht, die durch die $\mathfrak{G}(ab)$ geht, und mit der $\mathfrak{T}_1$ den Winkel $\mathfrak{W}_1$ bildet. Fig. 40.

Aufl. Da die $\mathfrak{E}(abc)$ durch den $\mathfrak{P}(a)$ geht und mit der $\mathfrak{T}_1$ den Winkel $\mathfrak{W}_1$ bildet, so muss (82. Satz 4.) die Spur eins der Ebene an einem Kreise berühren, dessen Mittelpunkt a_1 ist. Lässt man nun die $\mathfrak{K}_2$ durch b_2 gehen, damit der $\mathfrak{P}(b)$ in der $\mathfrak{T}_1$, also auch in der Spur eins der $\mathfrak{E}(abc)$ liegt, und zieht die $\mathfrak{G}(a_2 c_3)$ so, dass sie mit $\mathfrak{K}_2$ den Winkel $\mathfrak{W}_1$ bildet, so ist $a_2 c_3$ Halbmesser des aus a_1 beschriebenen Kreises, an dem die Spur eins der Ebene berühren muss und zwar im $\mathfrak{P}(c)$, und es ist daher die $\mathfrak{E}(abc)$ bestimmt.

Anm. 1. Es giebt hier so viele $\mathfrak{E}(abc)$, als vom $\mathfrak{P}(b_1)$ aus Tangenten an den Kreis möglich sind; demnach zwei oder eine oder keine, je nachdem die Länge $a_1 b_1$ grösser, gleich oder kleiner als der Halbmesser des Kreises ist.

Anm. 2. Ist statt $\mathfrak{W}_1$ der Winkel α gegeben, den die $\mathfrak{E}(abc)$ mit der $\mathfrak{G}(a_1)$ bildet, so kann man $\mathfrak{W}_1$ finden (indem $\mathfrak{W}_1 = 90'' - \alpha$ ist) und dann wie oben verfahren.

96. Ist gegeben eine $\mathfrak{G}(ab)$, und gesucht eine $\mathfrak{E}(abc)$, die mit einer $\mathfrak{G}(A)$ einen gegebenen Winkel β bildet, so schliesst sie mit einer auf der $\mathfrak{G}(A)$ senkrechten $\mathfrak{T}_3$ den Winkel $\mathfrak{W}_3 = 90^0 - \beta$ ein. Sucht man daher die Spur drei der $\mathfrak{E}(abc)$, indem man die $\mathfrak{K}_2$ durch b_2 und $\mathfrak{K}'$ durch b_1 gehen lässt, (wodurch b_1 ein Punkt der Spur drei der $\mathfrak{E}(abc)$ wird, wenn man die $\mathfrak{T}_3$ um $\mathfrak{K}'$ umklappt) und aus b_1 eine Tangente an einen Kreis legt, der aus a_3 mit einem Halbmesser beschrieben ist, gleich der Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks, dessen andere Kathete gleich dem $\mathfrak{A}_3$ des $\mathfrak{P}(a)$ dem $\wedge\ \beta$ gegenüberliegt: so darf man nur noch von einem $\mathfrak{P}(c)$ dieser Spur drei die Risse c_1 und c_2 aufsuchen, um die $\mathfrak{E}(abc)$ zu erhalten. Die Ausführung dieser Aufgabe überlassen wir dem Schüler.

Fig. 41. 97. Aufg. Es sind gegeben drei Punkte a, b und c in der $\mathfrak{T}_1$; gesucht ein Punkt d in dem + Raum der $\mathfrak{T}_1$, der von den Punkten a, b und c gegebene Entfernungen hat.

Aufl. Nehmen wir eine $\mathfrak{T}_3$ zu Hilfe, in der a, b und d liegen, so geht die $\mathfrak{K}'$ durch a und b und es fällt daher, wenn man die $\mathfrak{T}_3$ um $\mathfrak{K}'$ umklappt, a_3 mit a_1 und b_3 mit b_1 zusammen; ferner kommt d_3 so zu liegen, dass $a_1 d_3$ und $b_1 d_3$ beziehungsweise gleich den gegebenen Entfernungen des $\mathfrak{P}(d)$ von den Punkten a und b werden. Ist aber der $\mathfrak{R}_3$ des $\mathfrak{P}(d)$ gefunden, so muss d_1 in der zur $\mathfrak{K}'(a_1 b_1)$ Senkrechten $d_3 d_1$ liegen. Nimmt man ebenso eine $\mathfrak{T}_4$ an, die durch b, c und d geht (so dass $\mathfrak{K}''$ durch b_1 und c_1 geht) und klappt sie um $\mathfrak{K}''$ um, so kommt d_4 so zu liegen, dass $b_1 d_4$ gleich der Entfernung der Punkte b und d (also gleich $b_1 d_3$), und $c_1 d_4$ gleich der Entfernung der Punkte c und d wird. Desshalb liegt d_1 auch in der zur $\mathfrak{K}''$ Senkrechten $d_4 d_1$. Hat man so d_1 gefunden, so liegt d_2 im $\mathfrak{K}\mathfrak{L}_2$ des $\mathfrak{P}(d)$ und ist $\mathfrak{d}_2 d_2 = \mathfrak{A}_1$ dieses Punktes; dieser $\mathfrak{A}_1$ ist (weil d in der $\mathfrak{T}_3$ liegt, und daher die Nebenfigur dieses Punktes in Bezug auf

das Tafelsystem $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_3$ ein rechtwinkeliges Dreieck ist) die Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks, dessen Hypotenuse $\mathfrak{d}' d_3$ und dessen andere Kathete $\mathfrak{d}' d_1$ ist.

Anm. Wäre $a_1 d_3 = b_1 d_3 = c_1 d_4$, so wäre d_1 der Mittelpunkt einer durch a_1, b_1 und c_1 gehenden Kreislinie. Ist daher blos verlangt, dass der $\mathfrak{P}(d)$ gleichweit von a, b, c entfernt sein soll, ohne dass die Grösse dieser Entfernung bestimmt wird, so ist d_1 bestimmt, d_2 aber beliebig, d. h. es liegt der $\mathfrak{P}(d)$ in der $\mathfrak{G}(d_1)$.

98. Aufg. Es sind gegeben drei Punkte a, b, c; gesucht ein $\mathfrak{P}(d)$, dessen Entfernungen von den gegebenen Punkten bekannt sind. Fig. 42.

Aufl. Diese Aufgabe haben wir oben lösen gelernt für den Fall, dass die Punkte a, b, c in einer Tafel liegen. Ist dies nun nicht der Fall, so nimmt man eine $\mathfrak{T}_3$ an, die durch die gegebenen Punkte geht, und behandelt die Aufgabe mittelst des Tafelsystem $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_3$ (oder $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{T}_3$). Es ist dann, wenn man wieder die $\mathfrak{K}_2$ durch a_2 gehen lässt, $a_1 e_1$ die $\mathfrak{K}'$, und wenn man die $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_3$ so umklappt, dass die $\mathfrak{K}'$ zweimal erscheint, so ist $a_1 e_1$ die $\mathfrak{K}'_1$ und es erscheint der $\mathfrak{R}_3(a_3)$ in $\mathfrak{K}'_3$. Sucht man nun nach bekannten Gesetzen (mit Hilfe der Fig. b) a_3, b_3 und c_3, so kann man in derselben Weise, wie in voriger Nr. d_1 und der $\mathfrak{A}_1$ des $\mathfrak{P}(d)$ gefunden wurde, hier d_3 und den $\mathfrak{A}_3$ des $\mathfrak{P}(d)$ finden. Hat man aber d_3 und den $\mathfrak{A}_3$ des $\mathfrak{P}(d)$, so sucht man noch daraus (nach 71) d_1 und d_2.

Anm. Wir haben hier den $\mathfrak{P}(d)$ in dem + Raum der $\mathfrak{T}_3$ angenommen. Es giebt aber auch einen solchen Punkt in dem — Raum der $\mathfrak{T}_3$.

99. Aufg. Einen $\mathfrak{P}(e)$ zu finden, der von 4 Punkten a, b, c, d gleichweit absteht. Fig. 43.

Aufl. Sind die Punkte beliebig im Raume durch ihre Risse gegeben, so suchen wir erst einen Punkt, der von drei Punkten, z. B. a, b, c, gleichweit entfernt ist. Zu dem Ende suchen wir zuerst einen solchen Punkt e in der $\mathfrak{E}(abc)$ nach Anleitung der Nr. 90 und der Anm. zu dieser Nr. Durch diesen Punkt e legen wir dann eine Gerade, die $\perp \mathfrak{E}(abc)$ ist; in dieser Geraden liegt der gesuchte Punkt. Wiederholen wir dann dasselbe Verfahren in Bezug auf drei andere Punkte, z. B. a, b, d, so

bekommen wir eine zweite Gerade, die den gesuchten Punkt enthalten muss, und deren Schnitt mit der ersten Geraden den verlangten Punkt liefert.

Können wir aber die Tafeln frei wählen, so nehmen wir sie so an, dass die $\mathfrak{T}_1$ die Punkte a, b, c enthält, und dass die $\mathfrak{T}_2$ auf $\mathfrak{G}$(ab) senkrecht steht (wie dies in unserer Figur der Fall ist); dann ist der Punkt e_1 in der $\mathfrak{T}_1$, der von den in dieser Tafel liegenden Punkten a, b, c gleichweit entfernt ist, zugleich der $\mathfrak{R}_1$ des gesuchten Punktes e. Betrachten wir nun $\mathfrak{E}$(abd) als $\mathfrak{T}_3$ und suchen in dieser den Punkt e_3, der von a, b, d gleichweit entfernt ist, so liegt der gesuchte Punkt e in einer zur $\mathfrak{E}$(abd) in e_3 errichteten Senkrechten; demnach ist e_3 der $\mathfrak{R}_3$ des gesuchten Punktes. Wir haben also von dem $\mathfrak{P}$(e) den $\mathfrak{R}_1$ und den $\mathfrak{R}_3$ und können demnach durch dessen Nebenfigur seinen $\mathfrak{A}_1$, also auch seinen $\mathfrak{R}_2$ finden.

Anm. Liegen die Punkte a, b, c, d in einer Ebene, so werden die beiden zu den Ebenen abc und abd errichteten Senkrechten parallel; dann fällt der $\mathfrak{P}$(e) in's Unendliche, d. h. es giebt keinen solchen Punkt.

Fig. 44. 100. Aufg. Es sind vier Punkte a, b, c und d gegeben; man sucht einen Punkt e, welcher von den vier Ebenen abc, abd, acd und bcd gleichweit entfernt ist.

Aufl. Man nehme die Tafeln so an, dass die Punkte a, b und c in der $\mathfrak{T}_1$ liegen, und dass die $\mathfrak{G}$(ab) auf der $\mathfrak{T}_2$ senkrecht steht. Dann ist die $\mathfrak{E}$(abc) die $\mathfrak{T}_1$ und die $\mathfrak{E}$(abd) $\perp$ $\mathfrak{T}_2$, und daher die $\mathfrak{G}(a_2 d_2)$ ihr $\mathfrak{R}_2$. Soll nun der $\mathfrak{P}$(e) von der $\mathfrak{T}_1$ und der $\mathfrak{E}$(abd) gleichweit abstehen, so muss er (nach Anh. 48.) in einer $\mathfrak{E}(A_2)$ liegen, die den Winkel der $\mathfrak{E}$(abd) mit der $\mathfrak{T}_1$ halbirt. Sucht man ebenso mit Hilfe einer auf $b_1 c_1$ senkrechten $\mathfrak{T}_3$ die $\mathfrak{E}(B_3)$, welche den Winkel $\mathfrak{d}' b_3 d_3$, den die $\mathfrak{E}$(bcd) mit der $\mathfrak{T}_1$ bildet (s. 80.), halbirt, und sucht von einem Punkte f dieser Ebene den $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$, so hat man eine $\mathfrak{E}$(bcf), deren Punkte gleichweit entfernt sind von der $\mathfrak{T}_1$ und der $\mathfrak{E}$(bcd). Demnach ist die $\mathfrak{G}$(A), nach welcher die $\mathfrak{E}(A_2)$ von der $\mathfrak{E}$(bcf) geschnitten wird, eine Linie, deren Punkte von den Ebenen abc, abd und bcd gleichweit abstehen. Ebenso kann man eine $\mathfrak{G}$(C) finden, deren Punkte von den Ebenen abc, abd und acd gleich-

weit entfernt sind. Es ist dann der $\mathfrak{P}(e)$, nach dem sich die Geraden A und C schneiden, der gesuchte Punkt.

Anm. Da es (nach 92. Anm.) zwei Ebenen giebt, welche den Winkel zweier Ebenen halbiren, so ist der $\mathfrak{P}(e)$ unvollkommen bestimmt; es giebt acht Lagen, die er einnehmen kann. Nennen wir nemlich

die zwei Halbirungsebenen des Winkels von bca und bcd:
A und A′;
die des Winkels von acb und acd:
B und B′;
die des Winkels von abc und abd:
C und C′,

so geben A, B und C einen Punkt,
„ „ A, B „ C′ „ „
„ „ A, B′ „ C „ „
„ „ A, B′ „ C′ „ „
„ „ A′, B „ C „ „
„ „ A′, B „ C′ „ „
„ „ A′, B′ „ C „ „
„ „ A′, B′ „ C′ „ „

101. Wir wollen nun noch eine Aufgabe lösen, in der die Strahlenrisse zur Anwendung kommen sollen — eine Aufgabe, die wir schon früher in anderer Weise gelöst haben. Fig. 24.

Aufg. Eine Gerade zu finden, die zwei Gerade A, B schneidet, und mit einer dritten parallel ist.

Aufl. Wäre die letztere Gerade, und demnach auch die gesuchte, $\perp \mathfrak{T}_1$, also der $\mathfrak{R}_1$ von dieser ein Punkt, so müsste dieser Punkt zufolge der gegebenen Bedingungen in A_1 und B_1 liegen; demnach wäre der $\mathfrak{R}_1$ der gesuchten Geraden der Punkt, wo A_1 und B_1 sich schneiden. Ist aber die Gerade, welche mit der gesuchten parallel sein soll, die $\mathfrak{G}(C)$, also ihr Riss kein Punkt, so nehmen wir ein Risssystem an, für welches der Riss der $\mathfrak{G}(C)$ ein Punkt wird; wir nehmen nemlich $\mathfrak{St}'$ zu Hilfe, und zwar so, dass $\mathfrak{G}(C)$ ein $\mathfrak{St}'$ ist, indem wir sämmtliche $\mathfrak{St}'$ $\nparallel$ C wählen. Als $\mathfrak{T}'$ nehmen wir am Besten die $\mathfrak{LE}_1$ (oder $\mathfrak{LE}_2$) der $\mathfrak{G}(A)$ (oder B) an. Lassen wir $\mathfrak{T}' \mid \mathfrak{E}(A_1)$ und $\mathfrak{St}'$ $\parallel \mathfrak{G}(C)$, so ist der $\mathfrak{R}'$ der gesuchten Geraden ein Punkt, der im $\mathfrak{R}'$ von A und im $\mathfrak{R}'$ von B liegt. Suchen wir daher den

$\mathfrak{R}'$ von B, indem wir durch einen $\mathfrak{P}$(b) von B einen $\mathfrak{St}'$ legen, zusehen, wo er die $\mathfrak{T}'$ trifft, und diesen Punkt mit der Spur prim von B verbinden, so ist der $\mathfrak{P}$(a), in welchem B′ und A (das sich selbst zum $\mathfrak{R}'$ hat) schneiden, der $\mathfrak{R}'$ und demnach der $\mathfrak{St}'$ (D) die gesuchte Gerade.

§. 7.

Aufgaben über das Dreikant.

102. Jede Seite und jeden Winkel eines Dreikants (s. Anh. 49.) wollen wir ein Bestimmungsstück, oder Stück desselben nennen, so dass ein Dreikant sechs Bestimmungsstücke hat. Die Aufgaben nun, die über das Dreikant zu lösen sind, bestehen darin: wenn drei seiner Stücke gegeben sind, die fehlenden zu finden. Demnach werden wir folgende Aufgaben zu lösen bekommen. Man soll die Gestalt des Dreikants und die fehlenden Stücke suchen, wenn gegeben sind:

a) drei Seiten;
b) zwei Seiten und der von ihnen gebildete Winkel;
c) zwei Seiten und der Winkel, den eine dieser Seiten mit der fehlenden bildet;
d) drei Winkel;
e) zwei Winkel und die Seite, welche ein Schenkel von beiden ist;
f) zwei Winkel und die Seite, welche ein Schenkel des einen und nicht zugleich des anderen Winkels ist.

Fig. 45.

103. Jede Kante des Dreiecks ist von dessen Spitze s begrenzt, und geht von da aus ins Unendliche, während die Verlängerung derselben (von s aus nach entgegengesetzter Richtung) der Kante nicht angehört. Diese rückwärtige Verlängerung, die wir mit gestrichelten Linien charakterisiren wollen, soll die negative Kante heissen, und im Gegensatze dazu die eigentliche Kante, die wir mit zusammenhängenden Strichen zeichnen, die positive. Zwei positive Kanten des Dreikants bilden einen Winkel, der bekanntlich eine Seite des Dreikants vorstellt. Es ist leicht einzusehen, dass die negativen Verlängerungen dieser Kanten dieselbe Seite geben, dass dagegen

eine positive und eine negative Kante das Supplement zu der Seite bilden.

An der Kante A des Dreikants stossen zwei Seiten zusammen, die in zwei Ebenen liegen; jede dieser Ebenen wird von der Kante nebst ihrer negativen Verlängerung in zwei Theile getheilt, von denen der eine, welcher die Seite enthält, die positive Seite, der andere die negative Seite bezüglich A heissen soll Legen wir durch einen Punkt der (positiven oder negativen) Kante eine zu dieser senkrechte Ebene, so schneidet sie die beiden in dieser Kante zusammen stossen positiven Seiten, nach (zusammenhängend auszuziehenden) Geraden, die den Winkel des Dreiecks bilden; die negativen Seiten werden ebenfalls nach (gestrichelt zu zeichnenden) Geraden geschnitten, die denselben Winkel bilden, während ein negativer und ein positiver Schnitt das Supplement des Winkels vorstellt.

In allen den folgenden Aufgaben werden wir die Spitze des Dreikants mit s, dessen Kanten mit A, B, C die Winkel an diesen Kanten mit α, β, γ, die Seiten mit AB, AC, BC, das Dreikant mit ABC bezeichnen, und die Tafeln so wählen, dass $\mathfrak{T}_1$ die Seite AB enthält und die $\mathfrak{T}_2$ durch einen $\mathfrak{P}$(a) von A (der mit s nicht zusammenfällt) geht und auf A senkrecht steht, und dass das ganze Dreikant im + Raume der $\mathfrak{T}_1$ (also sein $\mathfrak{R}_2$ oberhalb $\mathfrak{K}_2$ erscheint) liegt. Dann schneidet die $\mathfrak{T}_2$ die Kanten B und C in ihrem positiven oder negativen Theile in den Punkten b, c, die ausnahmsweise auch in's Unendliche fallen können, von denen b (ebenso wie a) in der $\mathfrak{K}$ liegt, während c (dessen $\mathfrak{R}_1$ in $\mathfrak{K}_1$ erscheint) seinen $\mathfrak{R}_2$ oberhalb $\mathfrak{K}_2$ (Fig. a) oder unter $\mathfrak{K}_2$ (Fig. b) hat, je nachdem dieser Punkt in der + Kante C oder in der — Kante C liegt. Ferner ist die Gerade ac die Spur zwei der Seite AC, und zwar der + oder — Seite AC in Bezug auf die Kante A, je nachdem c in der + oder — Kante C liegt. Ein Aehnliches gilt für die Seite BC.

104. Aufg. Es ist gegeben ein Dreikant, gesucht eine Seite oder ein Winkel desselben. Fig. 45.

Aufl. Soll eine Seite gesucht werden, so darf man nur (82. Anm. 1.) den Winkel suchen, den die diese Seite begrenzenden Kanten des Dreikants mit einander bilden; soll ein Winkel gesucht werden, so haben wir die Aufgabe (83.) zu lösen, den

Winkel zweier Ebenen zu finden. (Dabei haben wir immer zu beobachten, dass die Seiten und Winkel eindeutig sind, und das oben Gesagte bezüglich der + und — Kanten, + und — Seiten zu berücksichtigen).

Ist aber die Seite a s b gesucht, so ist diese offenbar gleich $a_1 s_1 b_1$; und verlangt man den Winkel an der Kante s a, so ist dieser $= \bigwedge c_2 a_2 b_2$.

Sind nun Aufgaben zu lösen, in denen aus drei gegebenen Stücken die übrigen drei gesucht werden, so nehmen wir die Tafeln so an, dass diejenige Seite in der $\mathfrak{T}_1$ liegt, und diejenige Kante auf der $\mathfrak{T}_2$ senkrecht steht, welche sich behufs einfacher Lösung der Aufgabe am Besten dazu eignet, wie dies in den folgenden Aufgaben einzeln angegeben ist.

Fig. 46. 105. Aufg. Es sind gegeben die drei Seiten AB, AC, BC eines Dreikants; gesucht seine Gestalt und der Winkel α.

Aufl. Wir nehmen die $\mathfrak{T}_1$ so an, dass eine der Seiten, welche den $\bigwedge \alpha$ bildet, hier die Seite AB (also auch die Kanten A und B) in ihr liegt, während wir die $\mathfrak{T}_2$ senkrecht zur Kante A des Dreikants (an welche der $\bigwedge \alpha$ gebildet wird) annehmen. Betrachten wir ferner die zweite Seite AC des Dreikants als $\mathfrak{T}_3$ (die mit $\mathfrak{T}_1$ das neue Tafelsystem bildet), so können wir sie so umklappen, dass sie um $\mathfrak{K}'$ (A) gedreht wird, und der $\bigwedge A_1 C_3$ die Seite AC vorstellt; ebenso betrachten wir die dritte Seite (BC) als $\mathfrak{T}_4$ und klappen sie so um, dass sie nach $B_1 C_4$ kommt. Soll nun die Gestalt des Dreikants gesucht werden, so darf man nur bedenken, dass die Kanten A und B, da sie in der $\mathfrak{T}_1$ liegen, schon bestimmt sind, und dass dies auch von einem Punkte der dritten Kante, nemlich dem Scheitel s, gilt, um sich zu überzeugen, dass wir nur noch einen beliebigen $\mathfrak{P}$ (c) der dritten Kante C, von welcher die $\mathfrak{R}_3$ und $\mathfrak{R}_4$, nemlich C_3 und C_4, schon gezeichnet sind, zu bestimmen haben. Nehmen wir diesen $\mathfrak{P}$(c) so an, dass c_3 sein $\mathfrak{R}_3$ ist, so muss sein $\mathfrak{R}_4$ (c_4) so zu liegen kommen, das $c_4 s_4 = c_3 s_3$ ist. Sucht man in der bekannten Weise aus c_3 und c_4 die Risse c_1 und c_2, so hat man das Dreikant, und da die $\mathfrak{T}_2$ auf der Kante s a senkrecht steht, so ist der an dieser Kante gebildete Winkel der $\bigwedge a_2$.

Anm. Wäre nicht ausgesprochen, dass der $\mathfrak{P}$ (c) im + Raum der $\mathfrak{T}_1$ liegen soll, so könnten wir ihn auch in dem negativen

Raum dieser Tafel annehmen, und dann erhielten wir ein Dreikant, das mit dem gezeichneten symmetrisch, also nicht kongruent, ist. Die einzelnen Stücke dieses Dreikants stimmen aber mit denen des gezeichneten einzeln überein.

Da diese Anmerkung auch auf die folgenden Aufgaben sich anwenden lässt, so werden wir sie in der Folge weglassen.

106. Aufg. Es sind gegeben die Seiten AB, AC und der von ihnen gebildete $\measuredangle \alpha$; gesucht die Gestalt des Dreikants. Fig. 46.

Aufl. Nehmen wir wieder die $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$ und $\mathfrak{T}_3$ so an, wie in der vorigen Aufgabe und ist $\measuredangle c_2 a_2 b_2 = \measuredangle \alpha$, so ist (83. Aufl. 1.) $a_2 c_2$ der $\mathfrak{R}_2$ der Seite AC; suchen wir daher wieder einen $\mathfrak{P}(c)$ der Kante sc, so liegt sein $\mathfrak{R}_2$ in $a_2 c_2$. Ist wieder c_3 der $\mathfrak{R}_3$ des $\mathfrak{P}(c)$, so findet man, wenn $a_2 c_2 = a_1 c_3$ gemacht wird, den $\mathfrak{R}_2$ des $\mathfrak{P}(c)$ und daraus seinen $\mathfrak{R}_1(c_1)$. Wie man nun die fehlende Seite BC und die übrigen Stücke findet, ist bekannt.

107. Aufg. Es sind gegeben zwei Seiten AB, AC und der $\measuredangle \beta$, den die Seite AB mit der fehlenden Seite BC einschliesst; gesucht die Gestalt des Dreikants. Fig. 47.

Aufl. Wir nehmen in diesem Falle die Tafeln am Besten so an, dass die Seite AB, welche ein Schenkel des $\measuredangle \beta$ ist, also auch die Kanten A und B, in der $\mathfrak{T}_1$ liegt, und dass die Kante A, welche diese Seite mit der anderen gegebenen Seite gemein hat, auf der $\mathfrak{T}_2$ senkrecht steht. Ferner betrachten wir die Ebene der Seite AC als $\mathfrak{T}_3$ und klappen sie so um, dass die in ihr liegende Seite AC nach $A_1 C_3$ kommt. Suchen wir nun wieder einen in der Kante C und in der $\mathfrak{T}_2$ liegenden $\mathfrak{P}(c)$, dessen $\mathfrak{R}_3$ in c_3, so liegt wieder c_2 in einer aus a_2 mit dem Halbmesser $a_1 c_3$ beschriebenen Kreislinie. Da aber auch der $\mathfrak{P}(c)$ der Spur zwei der Seite BC angehört, so suchen wir diese Spur, also die Spur zwei einer Ebene, deren Spur eins die Gerade B, und deren Winkel mit der $\mathfrak{T}_1$ ($\measuredangle \beta$) gegeben ist. Diese Spur zwei (bd) finden wir (nach 88.), indem wir einen beliebigen Punkt d in der $\mathfrak{T}_2$ suchen, dessen $\mathfrak{R}_1$ auf der + Seite AB beliebig in $\mathfrak{R}_1$ angenommen wird, und dessen $\mathfrak{A}_1$ (oder $\mathfrak{D}_2 = \mathfrak{d}_2 d_2$) die Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks ist, dessen andere Kathete $= d_1 \mathfrak{d}''$ und in welchem der $\measuredangle \beta$ der letzteren Kathete anliegt. (Diese $\mathfrak{A}_1$ ist hier + oder —, je nachdem der $\measuredangle \beta$ spitz oder stumpf ist). Suchen wir nun in der gefundenen Spur einen Punkt

(c), dessen $\mathfrak{R}_2$ oberhalb $\mathfrak{K}_2$ liegt und von a_2 um die Länge $a_1 c_3$ entfernt ist, so ist das Dreikant bestimmt.

NB. Es kann je nach Umständen keinen, einen oder zwei Punkte c geben. Es gilt aber, wie schon erwähnt, nur ein solcher Punkt, der im + Raume der $\mathfrak{T}_1$ liegt, weil ja das ganze Dreikant in diesem Raume liegend vorausgesetzt ist.

Anm. Der Schüler wird gut thun, zu seiner Uebung die vorliegende Aufgabe zu lösen, wenn von den gegebenen Seiten und Winkeln eine oder mehrere stumpf sind, und daher die negativen Kanten und Seiten zur Anwendung kommen.

Fig. 48. 108. Aufg. Von einem Dreikant sind gegeben die Seite AB und die anliegenden Winkel α und β; man sucht das Dreikant.

Aufl. Nimmt man die Tafeln wieder wie bisher an, so dass der $\bigwedge a_2 = \bigwedge \alpha$ ist, und denkt man sich wieder auf der (gesuchten) Kante C einen in der $\mathfrak{T}_2$ liegenden Punkt c angenommen, dessen $\mathfrak{A}_1$ man beliebig wählt, so sind seine Nebenfiguren in Bezug auf die Tafelsysteme $\mathfrak{T}_3\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_4\mathfrak{T}_1$ rechtwinkelige Dreiecke $c c_1 a$ und $c c_1 c''$ (Fig. b), welche den $\mathfrak{A}_1$ des $\mathfrak{P}(c)$, nemlich $c c_1$, als gemeinschaftliche Kathete haben, der die gegebenen Winkel α und β gegenüberliegen. Demnach geben die Katheten $a c_1$ und $c_1 c''$ an, wie weit in der Fig. a der Punkt c_1 von A_1 und B_1 entfernt liegt. Zieht man daher zu A_1 und B_1 Parallele in den durch die Nebenfiguren bestimmten Entfernungen, so erhält man als ihren Schnittpunkt c_1 und aus diesem c_2.

Fig. 48. 109. Aufg. Es sind gegeben zwei Winkel α, β eines Dreikants und eine Seite AC, welche der Schenkel eines dieser Winkel, hier des $\bigwedge \alpha$, ist; gesucht die Gestalt des Dreikants.

Aufl. Wir nehmen die $\mathfrak{T}_2$ wieder so an, dass sie auf der Kante A des $\bigwedge \alpha$ (der $\bigwedge \alpha$ ist derjenige von den beiden gegebenen Winkeln, von welchem die gegebene Seite ein Schenkel ist) senkrecht steht, und die $\mathfrak{T}_1$ so, dass die gesuchte Seite AB, die ebenfalls ein Schenkel des $\bigwedge \alpha$ ist, in ihr (und zwar wollen wir festsetzen, dass die Seite AB rechts von $a_1 s_1$ erscheinen soll) und die Kante sc in ihrem + Raume liegt, so ist $a_2 b_2$ der $\mathfrak{R}_2$ der Seite AB und demnach, wenn $\bigwedge a_2 = \bigwedge \alpha$, $a_2 c_2$ der $\mathfrak{R}_2$ der Seite AC. Ferner betrachten wir die Ebene der Scite AC als $\mathfrak{T}_3$ und klappen diese so um, dass die Seite AC auf $A_1 C_3$ fällt.

Sucht man nun den $\mathfrak{P}(c)$ in der $\mathfrak{T}_2$, dessen $\mathfrak{R}_3$ in c_3, so liegt c_2 so in C_2, dass $a_2 c_2 = a_1 c_3$ ist. Hat man den $\mathfrak{P}(c)$ gefunden, und benützt man wieder die Nebenfiguren $a_1 c c_1$ und $c'' c_1 c$ (Fig. b), so muss c_1 (Fig. a) von B_1 um die Länge $c'' c_1$ entfernt sein. Es ist also B_1 die aus s_1 an einen Kreis gezogene Tangente, welche aus c_1 mit dem Halbmesser $c_1 c''$ gezeichnet ist, und liegt B_1 rechts von A_1. Es giebt daher je nach Umständen keine, eine oder zwei Lösungen der Aufgabe.

110. Aufg. Es sind gegeben die drei Winkel α', β', γ' eines Dreikants $A'B'C'$; gesucht eine beliebige Seite desselben, z. B. die Seite $B'C'$, welche die Winkel β' und γ' bilden hilft. Fig. 49.

Aufl. Wir lösen diese Aufgabe am Besten mit Hilfe des Supplementardreikants (Anh. 51.) Denken wir uns also dieses Ergänzungsdreikant, und nennen wir die auf die Seiten asb, asc, bsc gefällten Senkrechten nacheinander C, B, A, so sind die Seiten AB, AC, BC nacheinander die Supplemente von γ', β', α' und ist die gesuchte Seite $B'C'$ das Supplement des an der Kante A gebildeten Winkels. Man findet demnach die gesuchte Seite auf folgendem Wege: Man nimmt die Supplemente der Winkel α', β' und γ', betrachtet sie als Seiten eines Dreikants (des Supplementardreikants) und sucht (105.) das Dreikant ABC und (104.) den an der Kante A gebildeten Winkel, so ist das Supplement dieses Winkels die gesuchte Seite des Dreikants ABC.

111. Wir wollen noch eine Aufgabe lösen, in welcher das Dreikant zur Anwendung kommt.

Aufg. Es soll eine Ebene gefunden werden, die mit der $\mathfrak{T}_1$ den Winkel $\mathfrak{W}_1$ und mit der $\mathfrak{T}_2$ den Winkel $\mathfrak{W}_2$ einschliesst.

Aufl. Denken wir uns die Ebene gefunden, so bilden ihre Spuren A, B mit der $\mathfrak{K}$, wenn wir diese drei Geraden durch ihren gemeinschaftlichen Schnittpunkt a begrenzen, die Kanten eines Dreikants, dessen Winkel $\mathfrak{W}_1$, $\mathfrak{W}_2$ und der von den Tafeln gebildete rechte Winkel sind, während die zwei den Winkeln $\mathfrak{W}_1$, $\mathfrak{W}_2$ gegenüberliegende Seiten der von der Spur zwei (B) mit $\mathfrak{K}$ und der von Spur eins (A) mit $\mathfrak{K}$ gekildeten Winkel sind. Da durch diese Seiten die Stellung der gesuchten Ebene bestimmt ist, so haben wir also die Aufgabe: zwei Seiten eines Dreikants zu finden, wenn dessen Winkel gegeben sind. Fig. 50.

Lösen wir nun diese Aufgabe (nach der vorhergehenden Nummer), und machen den $\bigwedge (A_1 \mathfrak{K}) =$ der dem $\mathfrak{W}_2$ und $\bigwedge (B_1 \mathfrak{K}) =$ der dem $\mathfrak{W}_1$ gegenüberstehenden Seite, so ist die $\mathfrak{E}(AB)$ eine Ebene, die mit der $\mathfrak{T}_1$, und zwar mit den zur Linken von A liegenden Theil dieser Tafel, den $\bigwedge \mathfrak{W}_1$ und mit der $\mathfrak{T}_2$, in ähnlicher Weise, den $\mathfrak{W}_2$ bildet. Sollte die Ebene mit der rechts von A liegenden $\mathfrak{T}_1$ den $\bigwedge \mathfrak{W}_1$, also mit der linken Seite das Supplement von $\bigwedge \mathfrak{W}_1$ bilden, so würde sich auch für die Seite $(A, \mathfrak{K})$ der Supplementswinkel herausstellen etc.

Zweiter Abschnitt.

Aufgaben über Körper, die von Ebenen begrenzt sind.

§. 8.

Darstellung von Körpern, die von Ebenen begrenzt sind.

112. Wenn man einen Körper*) durch Zeichnung bestimmen will, so nimmt man die eine Tafel (z. B. die $\mathfrak{T}_1$) so an, dass der Körper in ihrem + Raume sich befindet und eine Seite des Körpers in ihr liegt, während man die andere (die $\mathfrak{T}_2$) so wählt, dass sie auf einer Kante des Körpers, die in der $\mathfrak{T}_1$ liegt, senkrecht steht. Ist der Körper eine Pyramide, so lässt man die Grundfläche (Anh. 57. 59.) in der $\mathfrak{T}_1$ liegen. Für das Prisma ist es vortheilhafter, die $\mathfrak{T}_1$ auf seinen Mantelflächen senkrecht anzunehmen. Man giebt nun in der $\mathfrak{T}_1$ die Risse aller Eckpunkte des Körpers an, und erhält, indem man die Risse je zweier Punkte, welche die Grenzpunkte einer Kante sind, verbindet, die Risse aller Kanten und somit den Riss des Körpers. Trägt man in der $\mathfrak{T}_2$ von den Kantenrissen aus auf die Kantenlothe die resp. $\mathfrak{A}_1$ der Punkte auf, und verbindet die so erhaltenen $\mathfrak{R}_2$ in derselben Ordnung wie die $\mathfrak{R}_1$ in der $\mathfrak{T}_1$, so erhält man die Risse der Eckpunkte und Kanten in der $\mathfrak{T}_2$, und der Körper ist bestimmt.

113. Bei weitem die meisten Körper, die man durch Zeichnung zu bestimmen hat, können nur in einer bestimmten Lage gegen den Horizont gebraucht werden; es muss daher auch diese Lage durch die Zeichnung bestimmt werden. Man nimmt zu dem Ende eine Tafel und zwar die $\mathfrak{T}_1$ (d. i. die Tafel, welche (nach 12.) so umgeklappt wird, dass vor der $\mathfrak{K}$ die + $\mathfrak{T}_1$ sich befindet) so an, dass sie eine horizontale und daher die $\mathfrak{T}_2$

*) Da wir es blos mit solchen Körpern zu thun haben, die von lauter Ebenen begrenzt sind, so ist unter Körper immer ein Polyeder (Anh. 56.) zu verstehen.

so, dass sie eine vertikale Lage hat; demnach ist auch die $\mathfrak{K}$ eine Horizontallinie. Bei dieser Annahme der Tafeln nennt man den $\mathfrak{R}_1$ einer Raumgrösse **ihren Grundriss,** den $\mathfrak{R}_2$ **ihren Aufriss.** Diese Annahme der Tafeln ändert an unseren früheren Betrachtungen nichts, sondern hat blos zur Folge, dass, wenn man den nach der Zeichnung angefertigten Körper aufstellen will, dies in der Art geschehen muss, dass er die durch die (horizontale) $\mathfrak{T}_1$ vorgezeichnete Lage gegen den Horizont hat. Ferner hat dies zur Folge, dass, wenn keine Seite des Körpers parallel zum Horizont oder wenn bei einem Prisma die Mantelflächen nicht vertikal sind, die $\mathfrak{T}_1$ nicht so gewählt werden kann, wie wir es oben (112.) für sie angegeben haben. Kann man daher die Risse des Körpers nur unter der Voraussetzung auffinden, dass die $\mathfrak{T}_1$ und die $\mathfrak{T}_2$ die oben angeführten Bedingungen erfüllen, so ist man genöthigt, durch ein neues Tafelnsystem (eine $\mathfrak{T}_3$ und $\mathfrak{T}_4$) den Körper zu bestimmen, und dann entweder in der $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ blos anzugeben, wie der Körper gegen den Horizont liegt, oder mit Hilfe der $\mathfrak{R}_3$ und $\mathfrak{R}_4$ die $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ der Ecken und Kanten des Körpers aufzusuchen.

Besteht ein Gegenstand aus mehreren Theilen, und nimmt man zur bequemeren Bestimmung der Gestalt der einzelnen Theile besondere Tafelsysteme zu Hilfe, während man in einem Tafelsystem entweder die Risse des ganzen Gegenstandes oder wenigstens so viel angiebt, dass die Lage der einzelnen Theile gegeneinder und gegen den Horizont dadurch bestimmt ist, so nennt man die Risse der einzelnen Theile Detailzeichnungen oder Details, die Risse des ganzen Gegenstandes das Ensemble. Soll nach den Details gearbeitet werden, so zeichnet man sie in wirklicher (natürlicher) Grösse und nennt sie Werk- oder Arbeits-Zeichnungen. Das Ensemble wird gewöhnlich in einem verkleinertem (verjüngtem) Massstabe, der zur wirklichen Grösse in einfachem Verhältnisse ($\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$ etc.) steht, gezeichnet, und so verkleinert, dass das zur Aufnahme beider Risse bestimmte Blatt, oder die beiden zur Aufnahme je eines Risses bestimmten Blätter den nöthigen Raum bieten; man schreibt dann auf das Blatt die Verjüngungung des Massstabes (z. B. $\frac{1}{4}$ natürlicher Grösse).

114. Sind a_1, b_1, c_1 und d_1 die $\mathfrak{R}_1$ von Eckpunkten eines Körpers, a_1b_1, b_1c_1, c_1d_1, a_1c_1, a_1d_1 und b_1d_1 die $\mathfrak{R}_1$ seiner Kanten, $a_1b_1c_1$, $a_1b_1d_1$ etc. die $\mathfrak{R}_1$ seiner Seiten, so enthält die Figur $a_1b_1c_1d_1$ die $\mathfrak{R}_1$ aller Punkte des Körpers; es ist daher diese Figur der $\mathfrak{R}_1$ desselben. Betrachtet man nun den $\mathfrak{R}_1$ unseres Körpers genauer, so sieht man, dass die $\mathfrak{R}_1$ der Seiten adc und abc auf die der Seiten bad und bcd zu liegen kommen, dass daher jeder in der Figur $a_1b_1c_1d_1$ angenommene Punkt, wenn er den $\mathfrak{R}_1$ eines Punkts auf der Oberfläche unseres Körpers vorstellen soll, zwei solchen Punkten angehören kann. Nimmt man nun die $\mathfrak{K}_2$ so an, dass kein Punkt des Körpers in dem — Raum der $\mathfrak{T}_1$ liegt, so ist von diesen beiden Punkten einer näher der $\mathfrak{T}_1$, einer entfernter von ihr. Man nennt dann den näheren einen unsichtbaren, den entfernteren einen sichtbaren Punkt des Körpers in Bezug auf die $\mathfrak{T}_1$*), und eine Linie so weit eine sichtbare in Bezug auf die $\mathfrak{T}_1$, als ihre Punkte in Bezug auf die $\mathfrak{T}_1$ sichtbar sind. Um nun in der Zeichnung die sichtbaren Linien von den unsichtbaren zu unterscheiden, hat man festgesetzt, dass man die sichtbaren Linien auszieht, d. h. durch zusammenhängende Striche, wie b_1d_1, die unsichtbaren strichelt, d. h. durch eine Aufeinanderfolge von kleinen Strichen, wie a_1c_1, zeichnet. Ist eine Linie der $\mathfrak{R}_1$ einer sichtbaren und unsichtbaren Linie, so ziehen wir sie aus; kann jeder Punkt einer Linie nur der $\mathfrak{R}_1$ eines Punktes sein, so nennen wir sie auch sichtbar und wird sie daher durch einen zusammenhängenden Strich ausgezogen. Fig. 56.

Anm. Man kann sich leicht überzeugen, dass Alles, was wir hier gesagt haben, auch für jede andere Tafel, sowie auch für jedes andere Polyeder gilt.

115. In der vorliegenden Figur ist jede Seite der Figur $a_1b_1c_1d_1$ der $\mathfrak{R}_1$ einer Kante des Körpers abcd; jeder in a_1b_1 Fig. 56.

---

*) Der Grund dieser Benennungen ist folgender: Wenn man sich im + Raume der $\mathfrak{T}_1$ das Auge so gestellt denkt, dass es in dem den beiden Punkten gemeinschaftlichen $\mathfrak{L}_1$ sich befindet und zwar so, dass es von der $\mathfrak{T}_1$ weiter entfernt ist, als der sichtbare Punkt, so wird es diesen Punkt sehen, während dieser den anderen (unsichtbaren) Punkt verdeckt.

Staats-
Bibliothek
Bamberg

angenommene Punkt liegt demnach, wenn er der $\mathfrak{R}_1$ eines Punktes des Körpers sein soll, in der Kante ab (ist also nicht zweideutig).

Da von den übrigen Seiten der Figur $a_1 b_1 c_1 d_1$ das nemliche, wie für die Seite $a_1 b_1$ gilt, so werden alle Seiten der Figur, welche den $\mathfrak{R}_1$ unseres Körpers vorstellt, ausgezogen. Es kann übrigens auch vorkommen, dass eine Seite des $\mathfrak{R}_1$ eines Körpers den $\mathfrak{R}_1$ einer Seite des Körpers vorstellt, einer Seite also, die auf der $\mathfrak{T}_1$ senkrecht steht. In diesem Falle würden die in dem Umfang dieser Seite liegenden Punkte theils sichtbare, theils unsichtbare sein, und es würde daher der $\mathfrak{R}_1$ dieser Seite ebenfalls ausgezogen, da diese Gerade der $\mathfrak{R}_1$ von sichtbaren und unsichtbaren Linien ist (s. oben 114). Es geht daraus hervor,

1) dass der Umfang des Risses eines Körpers stets ausgezogen wird. Diesen Umfang des Risses nennen wir den Umriss (Contur) und unterscheiden daher den Umriss eins und Umriss zwei.

Der $\mathfrak{R}_1$ einer Körper-Kante, der nicht im Umriss eins liegt, wird ausgezogen, wenn ein beliebig in ihr angenommener Punkt, dessen $\mathfrak{R}_1$ nicht im Umriss liegt, ein sichtbarer ist in Bezug auf die $\mathfrak{T}_1$. Mitunter stellt sich dies gleich heraus; so z. B. ist der $\mathfrak{P}$ d) sichtbar in Bezug auf die $\mathfrak{T}_2$, da er unter den Ecken unseres Körpers der entfernteste von der $\mathfrak{T}_2$ ist, und müssen daher $d_2 a_2$, $d_2 b_2$ und $d_2 c_2$ ausgezogen werden. Ebenso wird ein (nicht im Umriss eines Körpers liegender) Punkt in der $\mathfrak{T}_1$ unsichtbar sein für die $\mathfrak{T}_1$, weil er an dieser jedenfalls näher liegt, als der andere Punkt, der den $\mathfrak{R}_1$ mit ihm gemein hat. Ausserdem findet man dadurch, ob ein Punkt für eine Tafel, z. B. die $\mathfrak{T}_2$, sichtbar ist, indem man den zweiten Punkt, der mit ihm seinen $\mathfrak{R}_2$ gemein hat, aufsucht und sieht, welcher von beiden Punkten näher an der $\mathfrak{T}_2$ (die wieder so angenommen vorausgesetzt wird, dass der Körper in ihrem + Raum sich befindet) liegt (d. h. welcher eine kleinere $\mathfrak{D}_1$ hat). Hat man zwei Körperkanten (z. B. ac und bd unserer Figur), die sich kreuzen, während ihre $\mathfrak{R}_1$ sich schneiden, so kann man sich leicht überzeugen, dass nur eine von diesen Kanten in Bezug auf $\mathfrak{T}_1$ sichtbar ist, und welche. Sucht man nemlich den Punkt der

Oberfläche des Körpers, dessen $\Re_1$ im Schnitte von $a_1 c_1$ und $b_1 d_1$ (den $\Re_1$ der betrachteten beiden Kanten) liegt, so ist sein $\Re_2$ entweder auf $a_2 c_2$ oder auf $b_2 d_2$; wir erhalten also zwei Punkte, die dem $\Re_1$ entsprechen. Von diesen ist derjenige sichtbar, der den grösseren $\mathfrak{A}_1$ (oder die grösseren $\mathfrak{D}_2$) hat, hier also der Punkt auf bd; es ist also bd sichtbar und ac unsichtbar in Bezug auf die $\mathfrak{T}_1$. Wir haben also den Satz

1) Wenn zwei Körperkanten sich kreuzen, ihre $\Re_1$ aber sich schneiden, so ist die eine sichtbar, die andere unsichtbar in Bezug $\mathfrak{T}_1$.

116. Kann der $\Re_2$ eines Punktes eines Körpers *) mehr als zwei Punkten des Körpers angehören, wie dies bei hohlen Körpern der Fall ist, so ist der Punkt, wenn man von ihm weiss, dass er für die $\mathfrak{T}_2$ unsichtbar ist, noch nicht bestimmt, und ist demnach, wenn der $\Re_2$ einer Geraden des Körpers gestrichelt ist, diese Gerade ebenfalls noch nicht bestimmt. Für diese Fälle verfährt man daher so, dass man durch eine $\mathfrak{E}(A_1)$, die zur $\mathfrak{T}_2$ parallel ist, ein Stück des Körpers wegschneidet, und den $\Re_2$ des übrigen Stückes zeichnet, während man den $\Re_1$ des ganzen Körpers darstellt. Der Deutlichkeit wegen giebt man dann an, wie weit die Materie des Körpers von der Ebene durchschnitten ist, indem man den $\Re_2$ der Figur, welche der Durchschnitt der Ebene mit der Materie des Körpers ist, schraffirt, wie dies in der vorliegenden Figur geschehen ist. Man wird sehen, dass durch die Risse in unserer Figur die Gestalt des durch sie zu bestimmenden hohlen Körpers bestimmt ist, und dennoch dem $\Re_2$ eines Punktes nur zwei Punkte entsprechen. Man nennt einen solchen Riss, in welchem ein Theil des Körpers weggeschnitten ist, einen Durchschnitt, und zwar einen Horizontalschnitt oder Vertikalschnitt, je nachdem die Schnittebene horizontal und daher der Grundriss, oder vertikal und daher der Aufriss ein Durchschnitt ist. Ist der Körper ein Prisma und ist die Schnittebene senkrecht zu seinen Mantel- Fig. 51.

*) Da die Punkte eines Körpers, mit denen wir es zu thun haben, stets auf seiner Oberfläche liegen, so soll unter Punkt eines Körpers stets ein Punkt seiner Oberfläche verstanden werden.

flächen, so nennt man den Durchschnitt auch das Profil des Körpers.

117. Man pflegt bei der Bestimmung von Körpern durch ihre Risse die Buchstaben, welche zur Bezeichnung der Risse von Punkten und Linien dienen, wegzulassen (höchstens wendet man Buchstaben an, um bei Gegenständen, welche aus mehreren Theilen bestehen, den $\Re_1$ und $\Re_2$ des nemlichen Theils mit demselben Buchstaben zu bezeichnen). In diesem Falle reicht man sehr oft mit zwei Rissen eines solchen Theiles nicht aus, sondern ist es nothwendig, so viele Risse zu machen, dass man daraus erkennen kann, welche Punkte die Risse des nemlichen Punktes sind. Dies ist immer der Fall, wenn Körperkanten vorhanden sind, die in einer zur $\Re$ senkrechten Ebene liegen. In diesem Falle muss man immer eine $\mathfrak{T}_3$ annehmen, gewöhnlich so, dass sie auf $\Re$ senkrecht steht (in welchem Falle sie Seitentafel und der $\Re_3$ Seitenriss oder Seitenansicht heisst), annehmen und den $\Re_3$ des Körpers zeichnen.

118. Wenn man auch gewohnt ist, den $\Re_1$ unter dem $\Re_2$ eines Körpers zu zeichnen, und wir in unseren Blättern dies stets gethan haben, so ist das doch in der Praxis nicht immer der Fall, und ist es daher nicht selbstverständlich, dass der untere der beiden Risse der $\Re_1$ ist. Sind nun die Risse mit keinen Buchstaben versehen, und ist auch nicht gesagt, welches der $\Re_1$ ist, so wird man jeden der beiden Risse als $\Re_1$ betrachten können. Sehen wir nach, ob dies gleichgültig ist, und benützen wir dazu die Figur 56 (in der wir blos die Eckpunkte a, b, c, d und ihre Verbindungslinien berücksichtigen, die übrigen Punkte und Linien aber uns wegdenken).

Betrachten wir hier den unteren Riss als $\Re_1$ und die $\mathfrak{T}_1$ als Haupttafel, und denken wir uns die $\Re_2$ durch c_2 gelegt, so sind alle $\mathfrak{D}_2$ (also auch $\mathfrak{A}_1$) der Punkte positiv (die von c aus-genommen, welche $= 0$ ist). Es liegen also alle Punkte über der Haupttafel. Ist aber der untere Riss der $\Re_2$ und der obere der $\Re_1$, und betrachten wir die $\mathfrak{T}_2$ als Haupttafel und lassen die $\Re$ so wie sie vorhin war, so sind die Ordinaten in der Nebentafel eben so gross wie vorhin, aber negativ (da für die $\mathfrak{T}_1$ hinter der $\Re$ die $-\mathfrak{T}_1$ liegt) es liegen also jetzt die Punkte ebenso weit unter der Haupttafel, als vorhin über der-

selben. Der jetzt bestimmte Körper ist also mit dem vorhin bestimmten im Allgemeinen (wenn nemlich der Körper nicht selbst eine symmetrische Gestalt) nicht kongruent, sondern symmetrisch; man kann den einen den rechten, den andern den linken nennen. Demnach:

Je nachdem wir den unteren Riss als $\Re_1$ oder $\Re_2$ ansehen, bekommen wir den rechten oder linken Körper, also nicht den nemlichen, wenn nicht der Körper selbst symmetrisch ist.

Denken wir uns aber die beiden symmetrischen Körper (A und B) symmetrisch liegend, und die $\mathfrak{T}_1$ so angenommen, dass beide Körper im + Raume der $\mathfrak{T}_1$ sich befinden, so ist klar, dass alle Kanten, die in Bezug auf $\mathfrak{T}_1$ auf A sichtbar sind, für B unsichtbar erscheinen und umgekehrt. Sind daher auch nur in einem der Risse richtig angegebene gestrichelte Linien vorhanden, so wird man daraus ersehen können, welches der $\Re_1$ und $\Re_2$ ist. Wo nicht, so muss, wenn der Körper keine symmetrische Gestalt hat, angegeben sein, welches der $\Re_1$ und welches der $\Re_2$ ist.

Anm. Man sieht hieraus, dass unrichtig angegebene gestrichelte Linien entweder zu Wiedersprüchen oder zu Fehlern führen, dass es also wichtig ist, in dieser Beziehung keine Fehler zu machen.

119. Die graphische Bestimmung eines Körpers hat zum Zweck, den Körper mit Hilfe der Zeichnung anzufertigen. Es ist daher nicht genug, dass der Körper durch die Zeichnung bestimmt ist, sondern es muss sich nach der Zeichnung arbeiten lassen, und dies ist der Fall, wenn man aus der Zeichnung alle Längen und Winkel entnehmen kann, die man zur Anfertigung des Körpers braucht. Der Zeichner muss daher die Anfertigung des Körpers kennen, damit er weiss, wie er seine Zeichnung einrichten muss, dass der darnach Arbeitende Alles darin findet, was er nöthig hat. Es dürfte daher zweckmässig sein, über die Art der Anfertigung eines Polyeders das Wesentlichste hier mitzutheilen.

1) Das Polyeder kann in der Weise ausgeführt werden sollen, dass man es aus einem sehr dünnen Material macht macht (Blech, Carton etc.), dessen Dicke unberücksichtigt bleibt;

es werden dann die einzelnen Seitenflächen aus dem Material ausgeschnitten, in der gegebenen Ordnung zusammengestellt und an den zusammenstossenden Kanten durch ein Bindemittel (Leim, Loth etc.) verbunden. In diesem Falle braucht man blos die wahre Gestalt einer jeden Seitenfläche. Man zeichnet dann die sämmtlichen Seitenflächen in einer Ebene so an einander gereiht, dass sie möglichst viele Kanten gemein haben, die ihnen auch am fertigen Körper gemeinschaftlich zukommen. Diese Zeichnung nennt man das **Netz** des Polyeders.

2) Es soll der Körper aus dem Block gemacht, d. h. so, dass der von der Oberfläche begrenzte Raum von dem Material des Körpers ganz ausgefüllt wird. In diesem Falle wählt man sich natürlich ein Stück Material, das gross genug ist, den ganzen Körper aufzunehmen, und beginnt damit, dieses Material an geeigneter Stelle eben zuzurichten (durch Feilen, Hobeln, Behauen etc.) und in dieser Ebene die in sie fallende Seite des Körpers in ihrer wahren Gestalt aufzuzeichnen *). Nun stellt man auf dem Material eine zweite Ebene her, die durch eine der in der ersten Ebene aufgezeichneten Kanten geht, und mit dieser Ebene den Winkel bildet, den die beiden Ebenen einschliessen sollen, und zeichnet in die zweite Ebene die in ihr liegende Seite des Körpers richtig ein. Um den weiteren Fortgang der Operationen zu zeigen, wollen wir den in Fig. 52 gezeichneten Körper (der eine Pyramide mit zwei Grundflächen vorstellt) zu Hilfe nehmen, und voraussetzen, dass die auf dem Material hergestellten Ebenen die Ebene der grösseren Grundfläche und die Ebene der Seite abfg seien, und dass in diesen beiden Ebenen die entsprechenden Seiten des Körpers so eingezeichnet sind, dass die ihnen gemeinschaftliche Kante ab in der Schnittlinie der beiden Ebenen liegt. Dann sind von der Seite afhc die Kanten af und ac auf das Material aufgezeichnet. Stellt man daher durch Fortschaffen des überflüssigen Materials (mittelst

---

*) Ist das Material Metall, so schneidet man sich die Gestalt der Seite in Blech aus (dieses nennt man dann eine Schablone oder Lehre, mitunter auch Modell), legt die Lehre auf die Ebene und zeichnet ihren Umfang mittelst einer Reissnadel (einer Stahlspitze) auf, was man aufreissen nennt.

Feilen etc.) eine Ebene her, die durch ac und af geht, so kann man diese Seite mittelst ihrer Schablone wieder auf das Material aufzeichnen; auf dieselbe Art kommt man von dieser Seite zur nächsten, von der zur vierten und zur fünften (die Schablone dieser letzten Mantelfläche kann man, wie leicht ersichtlich, entbehren, wird aber gut thun, sie der Controlle wegen zu machen). Die obere Grundfläche ist aber dann vollständig aufgezeichnet und kann (durch Feilen etc.) hergestellt werden.

Hieraus ist ersichtlich, dass die Arbeitszeichnung, nach welcher der Körper hergestellt werden soll, nicht blos die Risse der Ecken und Kanten desselben enthalten muss, sondern auch die Schablonen einer Grundfläche, aller Mantelflächen, und den Winkel, den die Grundfläche mit einer Mantelfläche bildet.

Deshalb nehmen wir zur Bestimmung eines Polyeders die Tafeln so an, dass in einer, z. B. der $\mathfrak{T}_1$, eine Seite des Körpers liegt (dann ist die Schablone dieser Seite gleich dem $\mathfrak{R}_1$ derselben) und dass die $\mathfrak{T}_2$ zu einer Begrenzungslinie dieser Seite (wie in Fig. 52. zur Kante ab) senkrecht steht, so dass der Winkel, den die beiden in dieser Kante zusammenstossenden Seiten mit einander einschliessen in der $\mathfrak{T}_2$ (hier der $\angle\, g_2 a_2 e_2$) gegeben ist.

In der Arbeitszeichnung geben wir dann noch die Schablonen so vieler Seiten (in der Weise, durch Umklappung, wie in Fig. 52 die Seiten $a_1 b_1 g_4 f_4$ und $a_1 c_1 h_3 f_3$) an, als nothwendig erscheinen; mitunter, bei zusammengesetzten Körpern, auch noch als nothwendig erachtete Winkel von Seitenflächen.

Anm. Würde man auf der oberen Fläche unseres Körpers, ehe sie bearbeitet ist, einen spitzigen Stift befestigen, dessen Spitze mit der Spitze der Pyramide (die man erhält, wenn man statt der oben benützten Schablone $a_1 b_1 g_4 f_4$ die Schcblone $a_1 b_1 s_4$ anwendet) zusammenfällt, so würde man, wie man sich leicht überzeugen kann, nur die in unserer Figur gezeichneten beiden Schablonen von Mantelflächen brauchen.

Zur Ausführung eines Prisma's (Fig. 53.) kann man auch so verfahren, dass man sein Profil ($a_2 d_2 h_2 f_2$) benützt. Man arbeitet auf einem beiläufig prismatischen Stab eine zu seiner Längen-

richtung senkrechte Ebene, trägt darauf mittelst Schablone das Profil und legt durch dessen Umfangslinien senkrechte Ebenen zur Profilebene, wodurch man die Mantelkanten (a_2, d_2, h_2, f_2) des Prisma's erhält. Auf diese trägt man vom Profil aus für $\mathfrak{G}(f_2)$ die Längen $f_1 f_1$ und $f_1 e_2$, für $\mathfrak{G}(h_2)$ die Länge $h_1 h_1$ und $h_1 g_1$ u. s. w. auf, wodurch man alle Ecken erhält. Stellt man dann noch die Ebenen der Grundflächen her, so ist der Körper vollendet; man braucht dazu nur die Schablone des Profils, und die Arbeit wird genauer. Daher für ein Prisma eine Darstellung, in welcher das Profil erscheint, wünschenswerth ist.

§. 5.

Aufsuchung der Risse eines Körpers.

120. Man bekommt entweder die Aufgabe, einen schon angefertigten Körper durch Zeichnung zu bestimmen oder einen noch nicht vorhandenen (einen projectirten) Körper darzustellen.

Bei dem Bestimmen eines fertigen Körpers, welches „Aufnehmen“ genannt wird, ist die Lage eines beliebigen Punktes gegen alle Punkte, Gerade und Seiten des Körpers selbst, oder solcher Dinge, die mit dem Körper in eine feste Verbindung gebracht sind, unmittelbar gegeben, während bei der Bestimmung eines projectirten Körpers für jeden Punkt nur so viel Bedingungen gegeben sind, als zu seiner Bestimmung nothwendig erscheinen, und man sich daher blos an diese Bedingungen halten kann. Wir können daher über das Bestimmen von projectirten Körpern blos einige Beispiele machen, da die Bedingungen, die dabei gegeben sein können, von zu grosser Mannigfaltigkeit sind, als dass wir sie erschöpfen könnten. Dagegen wollen wir über das Aufnehmen von Körpern erschöpfende Regeln geben. Da man übrigens die Regeln über das Bestimmen von projectirten Körpern auch auf das Aufnehmen anwenden kann, so wollen wir mit der Bestimmung von projectirten Körpern anfangen.

Fig. 52. 121. Aufg. Von einer Pyramide mit ebenen Grundflächen (s. Anhang) seien gegeben eine Grundfläche und zwei aneinanderstossende Mantelflächen, und sei festgesetzt, auf welcher Seite der Grundfläche die Mantelflächen erscheinen sollen; gesucht die Risse dieses Körpers.

Aufl. Man nimmt die $\mathfrak{T}_1$ so an, dass sie die Grundfläche $a_1 b_1 c_1 d_1 e_1$ der Pyramide enthält und diese in ihrem + Raume sich befindet, die $\mathfrak{T}_2$ so, dass sie auf einer in der Grundfläche liegenden Kante ab senkrecht steht; ferner betrachtet man die Ebene der einen Mantelfläche als $\mathfrak{T}_3$, die der andern als $\mathfrak{T}_4$ und klappt diese Tafeln so um, dass sie ihre Kanten ($a_1 c_1$ und $a_1 b_1$) mit der $\mathfrak{T}_1$ gemein behalten und die gegebenen Mantelflächen beziehungsweise nach $a_1 b_1 g_4 f_4$ und $a_1 c_1 h_3 f_3$ kommen (wobei $a_1 f_3 = a_1 f_4$ sein muss, da beide Längen die Entfernung der Punkte a und f angeben). Soll aber der Körper eine Pyramide sein, so ist s_3 der $\mathfrak{R}_3$ und s_4 der $\mathfrak{R}_4$ der Spitze und muss daher auch $s_3 a_1 = s_4 a_1$ sein. Sollen nun die Risse der Ecken des Körpers gezeichnet werden, so ist vor allem zu bemerken, dass die Ecken der Grundfläche sich selbst zu $\mathfrak{R}_1$ haben, und dass ihre $\mathfrak{R}_2$ in der $\mathfrak{K}_2$ liegen. Zur Bestimmung der übrigen Punkte suchen wir zunächst die Spitze, deren $\mathfrak{R}_1$ in den beiden aus s_3 und s_4 zu den Kanten $a_1 c_1$ und $a_1 b_1$ beziehungsweise senkrechten Geraden liegt. Hat man so s_1, so findet man s_2 durch seinen $\mathfrak{A}_1$ der in dem Tafelsystem $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_3$ durch die Nebenfigur auf bekannte Weise gefunden wird. Nun kann man alle Mantelkanten zeichnen und die Punkte f, g, h dadurch finden, dass man sucht, wo die $\mathfrak{KL}'$ oder $\mathfrak{KL}''$ derselben die $\mathfrak{R}_1$ der entsprechenden Mantelkanten treffen, wodurch man f_1, g_1, h_1 findet, und daraus f_2, g_2, h_2 sucht. Um aber die übrigen Punkte der oberen Grundfläche zu finden, darf man sich nur erinnern, dass diese Punkte mit den schon gefundenen Punkten f, g, h in einer Ebene und in den Geraden sd, se liegen; sucht man also (nach 46.) den Schnitt der $\mathfrak{G}$(sd) mit $\mathfrak{E}$(fgh), so erhält man den $\mathfrak{P}$(k) und ebenso $\mathfrak{P}$(i) als Schnitt von $\mathfrak{G}$(se) mit $\mathfrak{E}$(fgh).

Hat man die Zeichnung in Blei vollendet, und soll sie mit Tusch ausgezogen werden, so muss man noch nachsehen, welche Linien gestrichelt werden. Warum in unserer Zeichnung blos $f_2 k_2$ gestrichelt ist, wird man leicht herausfinden.

122. Von einem Prisma mit ebenen Grundflächen sind ge- Fig. 53.
geben eine Grundfläche und zwei zusammenstossende Mantelflächen; man soll seine Risse zeichnen.

Aufl. Man nehme die Tafeln so an, dass eine Mantelfläche (hier abcd) in der $\mathfrak{T}_1$ liegt, und die $\mathfrak{T}_2$ auf den Mantelkanten

senkrecht steht, (so dass der $\mathfrak{R}_2$ des Prisma's zugleich sein Profil angiebt), klappe wieder die beiden übrigen gegebenen Flächen (in derselben Weise wie oben) um, und suche die Risse der ausser der $\mathfrak{T}_1$ liegenden Punkte. Hiebei beginnen wir mit demjenigen Punkte, von dem wir zwei Risse ($\mathfrak{R}_3$ und $\mathfrak{R}_4$) haben, hier mit dem $\mathfrak{P}$(e), dessen Risse wir in derselben Art, wie in voriger Nr. die des $\mathfrak{P}$(s), finden. Hieraus ist leicht auch der $\mathfrak{P}$(f) zu erhalten (da $\mathfrak{S}$(ef) ein $\mathfrak{L}_2$ ist), und somit sind von jeder der beiden Grundflächen drei Punkte, also auch die Lage ihrer Ebenen bekannt. Um nun einen ferneren Punkt der Grundfläche begc (deren $\mathfrak{R}_4$ gegeben ist) zu finden, z. B. den $\mathfrak{P}$(g), ziehen wir aus g_4 das $\mathfrak{RL}''$ ($g_4 \mathfrak{g}''$) dieses Punktes, und suchen die $\mathfrak{D}_1''$ ($\mathfrak{g}'' g_1$), welche wir aus der Nebenfigur dieses Punktes in Bezug auf das System $\mathfrak{T}_1 \mathfrak{T}_4$ erhalten. Diese Nebenfigur ist aber ein rechtwinkeliges Dreieck, dessen Hypotenuse $g_4 \mathfrak{g}''$ mit derjenigen Kathete, welche die $\mathfrak{D}_1''$ giebt, den $\measuredangle \alpha''$ bildet, den die $\mathfrak{T}_1$ mit $\mathfrak{T}_4$ einschliesst. Den $\measuredangle \alpha''$ erhalten wir aber durch die Nebenfigur $e_1 \mathfrak{e}'' e''$ (Fig. b) des Punktes e in Bezug auf das System $\mathfrak{T}_1 \mathfrak{T}_4$. Machen wir daher in dieser Figur $\mathfrak{e}'' g_4 = \mathfrak{g}'' g_4$ (der Fig. a), so erhalten wir die verlangte Nebenfigur $\mathfrak{e}'' g_1 g_4$ und damit (in Fig. a) g_1 und g_2. In derselben Art finden wir noch weitere Punkte der gegebenen Grundfläche, wenn dieselbe mehr als vier Ecken hat. Um die noch fehlenden Punkte der anderen Grundfläche zu erhalten, z. B. $\mathfrak{P}$(h), suchen wir nach bekannten Regeln, wo die $\mathfrak{S}$(gh), deren $\mathfrak{R}_2$(h_2) mit g_2 zusammenfällt, die $\mathfrak{S}$(def) schneidet.

Fig. 55. 123. Aufg. Von einem Körper, der von 6 allgemeinen Vierecken begrenzt ist, sind die wahren Gestalten dreier zusammenstossender Seiten gegeben; man sucht die Gestalten der übrigen Seiten.

Aufl. Man nimmt wieder die $\mathfrak{T}_1$ so an, dass eine gegebene Seite (hier abcd) in ihr liegt, betrachtet die Ebenen der beiden anderen Seiten als $\mathfrak{T}_3$ und $\mathfrak{T}_4$ und zeichnet ihre Umklappungen $a_1 e_3 f_3 b_1$ und $a_1 d_1 g_4 e_4$ (wobei wleder $a_1 e_3 = a_1 e_4$). Nennen wir die vier Seiten des Körpers, welche mit der Seite abcd (die wir die Grundfläche heissen wollen) je eine Kante gemein haben, die Mantelflächen und die sechste Seite (efgh) die Deckfläche, so sind ab, bc, cd, da die Spuren eins der Mantelflächen, während

die Spur eins der Deckfläche noch zu suchen ist. Nun ist aber die Spur eins der $\mathfrak{G}(ef)$ offenbar in dem $\mathfrak{P}(i)$, in welchem ef und ab sich schneiden, die der $\mathfrak{G}(eg)$ in k (dem Schnitte von eg und ad), also ist ik die Spur eins der Deckfläche, und demnach die von $\mathfrak{G}(fh)$ in l, die von $\mathfrak{G}(gh)$ in m. Betrachtet man die Deckfläche als $\mathfrak{T}_7$ und klappt sie um ihre Spur eins (ik) um, so findet man e_7 dadurch, dass $ie_7 = ie_3$ und $ke_7 = ke_4$ sein muss, f_7 wenn man $if_7 = if_3$, und g_7, wenn man $kg_7 = kg_4$ macht. Man hat so von der umgeklappten Deckfläche die Seiten ef und eg, während man die beiden anderen Seiten fh und gh dadurch finden kann, dass fh durch l (der Spur eins dieser Linie) und gh durch m geht. Betrachtet man die Mantelfläche bchf als $\mathfrak{T}_5$ und klappt sie um bc um, so findet man bch_5f_5 dadurch, dass $bf_5 = bf_3$, $lf_5 = lf_7$ und $lh_5 = lh_7$ sein muss. In gleicher Art findet man $ch_6g_6d_1$ und muss zur Probe $ch_6 = ch_5$ werden.

Anm. Wie man aus e_3 und e_4 den $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ dieses Punktes findet, haben wir schon öfters gesehen. In gleicher Art können wir von den übrigen Punkten der Deckfläche, wenn es gewünscht wird, den $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ finden, also sind wir auch im Stande, mittelst unserer Figur den $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ des Körpers zu zeichnen.

In der in vorliegender Nr. beschriebenen Art kann man von jedem Prisma und jeder Pyramide mit ebenen Grundflächen, aus drei zusammenstossenden Seiten das Netz finden.

124. Aufg. Von einem vierseitigen Prisma mit ebenen, nicht parallelen, Grundflächen sind gegeben: Drei zusammenstossende Mantelflächen abcd, aefb, cdgh; man sucht das Prisma. Fig. 57.

Aufl. Denkt man sich das Prisma gefunden, und die beiden (noch zu suchenden) Grundflächen aegd und bchf um die Kanten ad, bc umgeklappt, und stellt man sich vor, es sollen die beiden Mantelflächen aefb und cdgh verlängert werden, bis sie sich nach einer Kante mn schneiden, deren Endpunkte m, n in den entsprechenden Grundflächen aegd, bchf liegen. Betrachtet man, wie dies aus den Bezeichnungen in unserer Figur hervorgeht, aefb als $\mathfrak{T}_3$, cdgh als $\mathfrak{T}_4$, aegd als $\mathfrak{T}_5$ und bchf als $\mathfrak{T}_6$, so muss offenbar $m_3n_3 = m_4n_4$ sein, und müssen die Geraden m_3m_4 und n_3n_4 senkrecht auf ab stehen, also die

Figur $m_3 n_3 n_4 m_4$ ein Rechteck sein, dessen Ecken in den Geraden $a_1 e_3$, $b_1 f_3$, $c_1 h_4$, $d_1 g_4$ beziehungsweise liegen, und dessen Seiten gegebene Richtungen haben. *) Sucht man nun dieses Rechteck $m_3 n_3 n_4 m_4$, so kann man daraus m_5 und n_6 und somit auch e_5, g_5 und f_6, h_6 und somit das Netz des Prismas und sein Profil $a_2 e_2 g_2 b_2$ finden.

NB. Hätte das Prisma eine mehr als vierseitige Grundfläche, so müssten zu seiner Bestimmung mehr Bedingungen als oben gegeben sein, durch die man mit Hilfe des oben gezeigten Weges dessen Netz finden würde.

Fig. 58. 125. Aufg. Von einem Obelisk sind eine Grundfläche und zwei zusammenstossende Mantelflächen gegeben; man sucht die Risse seiner Ecken.

Aufl. Man nimmt die Tafeln wieder so an, dass die Grundfläche in $\mathfrak{T}_1$, eine Linie derselben $\perp \mathfrak{T}_2$ ist, und klappt die beiden Mantelflächen in der üblichen Art um, so dass $a_1 b_1 c_1 d_1$ die Grundfläche und deren $\mathfrak{R}_1$, $a_1 b_1 f_3 e_3$ und $a_1 c_1 g_4 e_4$ der $\mathfrak{R}_3$ und resp. $\mathfrak{R}_4$ der gegebenen Mantelflächen sind. (Nach der Natur des Obelisken muss $ef \parallel ab$ und $eg \parallel ac$ sein, und braucht der Schnittpunkt von ae und bf nicht mit dem von ae und cg zusammenfallen).

Wir finden nun in der bisherigen Weise die Punkte e, f, g; da noch $gh \parallel cd$ und $fh \parallel bd$ sein muss, so bestimmt sich auch der $\mathfrak{P}(h)$ und damit sind alle Ecken und Kanten des Körpers bekannt.

Anm. Hätte der Obelisk fünf Mantelflächen, so würde, wie sich leicht erkennen lässt, dessen Gestalt durch die gegebenen drei Seiten nicht bestimmt sein. Es müsste dann noch ein Bestimmungsstück gegeben werden; wäre dies eine weitere Mantelfläche, so würde die Auflösung ähnlich fortgehen wie oben. Ebenso

---

*) Zufolge eines Satzes aus der neueren Geometrie findet man dieses Rechteck folgendermassen. Man nimmt drei seiner Eckpunkte auf den entsprechenden drei Geraden an, und sucht den vierten Punkt. Würde man dies öfter wiederholen, so läge der vierte Punkt auf einer Geraden. Sucht man daher nur zwei Lagen des vierten Punktes, so liegt in der Verbindungslinie der beiden Lagen, und natürlich auch auf der vierten Geraden, ein Eck des verlangten Rechtecks.

würde ein sechsseitiger Obelisk durch 4 Mantelflächen gefunden werden können.

126. Aufg. Die Risse eines regulären Polyeders zu finden.

Aufl. Wir wollen diese Aufgabe sowohl für das reguläre Dodekaeder sowie für das Ikosaeder in zwei Fällen lösen.

1) Haben wir ein Dodekaeder zu zeichnen, dessen Seite a b c d e in der $\mathfrak{T}_1$ liegt, und denkt man sich die $\mathfrak{R}_1$ der an diese Seite anstossenden Flächen gezeichnet, so wird man leicht aus der Regelmässigkeit des Körpers erkennen, dass der Umfang der dadurch erhaltenen Zeichnung ein reguläres Zehneck bildet, dessen Ecken f_1, g_1 (da $f_1 g_1 = e_1 c_1$ ist) erhalten werden, wenn man durch c_1, e_1 Senkrechte zu $a_1 b_1$ zieht, und sucht, wo sie die Geraden $o_1 a_1$ und $o_1 b_1$ (o_1 der Mittelpunkt von $a_1 b_1 c_1 d_1 e_1$) schneidet. Betrachtet man die Ebene des Fünfeckes a b g h f als $\mathfrak{T}_3$ und klappt sie um a b in die Ebene des Blattes, so kann dies in der Art geschehen, dass dieses umgeklappte Fünfeck auf das in der $\mathfrak{T}_1$ liegende fällt, so dass f auf e_1 kommt. Man kann daher die Nebenfigur von f in Bezug auf das System $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_3$ konstruiren, und demnach auch den $\mathfrak{A}_1$ des $\mathfrak{P}(f)$. In ähnlicher Art verhält es sich mit $\mathfrak{A}_1$ von h; man ist somit im Stande, den $\mathfrak{R}_2$ des Körpers zu konstruiren, was wir jedoch dem Schüler überlassen wollen. Fig. 59 a.

2) Es soll das Dodekaeder so dargestellt werden, dass eine Kante desselben in der $\mathfrak{T}_1$ liegt, und die beiden in dieser Kante zusammenstossenden Seitenflächen g l e i c h e Winkel mit $\mathfrak{T}_1$ bilden. Fig. 59 b.

Wenn man sich den $\mathfrak{R}_1$ unseres Körpers, der den gestellten Bedingungen entspricht, beiläufig skizzirt, so wird man sich leicht überzeugen, dass er die Gestalt (Fig. 59. b) annehmen wird, in welcher $a_1 b_1$ den $\mathfrak{R}_1$ z w e i e r Kanten vorstellt (von denen eine die in der $\mathfrak{T}_1$ liegende ist), g_1 und h_1 Risse von Kanten sind, die auf der $\mathfrak{T}_1$ senkrecht stehen (so dass $g_1 c_1$, $g_1 e_1$, $h_1 d_1$, $h_1 f_1$ die $\mathfrak{R}_1$ von vier Seiten vorstellen) und dass jedes der gezeichneten vier Fünfecke, z. B. $a_1 b_1 i_1 h_1 k_1$, der $\mathfrak{R}_1$ von zwei zur $\mathfrak{T}_1$ g l e i c h geneigten Seiten ist. Indem man sich über die $\mathfrak{R}_1$ der zwölf Seiten Rechenschaft gegeben, ist man zu der Ueberzeugung gekommen, dass unsere Zeichnung richtig ist, und ist blos noch die Frage, wie gross die einzelnen Strecken in unserer Figur sein müssen. Zunächst nun ist leicht zu erkennen, dass $i_1 k_1$,

$k_1 m_1$, $m_1 l_1$ und $l_1 i_1$ die Längen der Diagonalen eines Fünfecks haben (als Risse von Diagonalen $\parallel \mathfrak{T}_1$) und dass $a_1 b_1$. $c_1 d_1$, $e_1 f_1$ so lange, als die Kanten des Körpers sind. Da, wie schon bemerkt, $f_1 h_1$ der $\mathfrak{R}_1$ eines Fünfeckes ist, so ist die Strecke $f_1 h_1 =$ der Höhe des Fünfeckes und die $f_1 k_1$ gleich der Entfernung einer Seite des Fünfeckes von einer mit der Seite parallelen Diagonale. Zeichnet man sich also ein Fünfeck in seiner wirklichen Gestalt nebst Höhe und Diagonale parallel zur Grundlinie, so erhält man alle zur Konstruktion unserer Figur nothwendigen Masse.

Was den $\mathfrak{R}_2$ des Körpers betrifft, so ist leicht einzusehen, dass er dieselbe Gestalt hat, wie der $\mathfrak{R}_1$, nur muss, wenn der $\mathfrak{R}_2$ wie gewöhnlich senkrecht über $\mathfrak{R}_1$ erscheinen soll, der letztere um 90^0 gedreht und senkrecht hinauf geschoben worden, damit der entsprechende $\mathfrak{R}_2$ erhalten werde.

Fig. 59 c. 3) Zeichnet man den $\mathfrak{R}_1$ eines regulären Ikosaeders so, dass die Grundfläche einer von fünf zusammenstossenden Seiten gebildeten Pyramide, $\parallel \mathfrak{T}_1$ ist, so erhält er die Gestalt (Fig. 59. c), deren Umfang ein reguläres Zehneck ist, dessen Konstruktion leicht aus der Figur entnommen werden kann. Die Bestimmung der $\mathfrak{A}_1$ der einzelnen Punkte durch Nebenfiguren in ähnlicher Art wie oben beim Dodekaeder überlassen wir dem Schüler.

Fig. 59 d. 4) Stellt man das Ikosaeder so, dass eine Kante desselben in der $\mathfrak{T}_1$ liegt und die in ihr zusammenstossenden Seiten gleiche Winkel mit der $\mathfrak{T}_1$ bilden, so erhält der $\mathfrak{R}_1$ die Gestalt (59. d), aus Gründen, die der Schüler selbst finden wird. In dieser Figur ist offenbar $a_1 b_1$, $c_1 d_1$, $f_1 g_1$ gleich einer Kante des Körpers $d_1 f_1$, $c_1 g_1$, $e_1 h_1$ gleich einer Diagonale der fünfseitigen Grundfläche der obengenannten Pyramide. Der $\mathfrak{R}_2$ hat wieder mit $\mathfrak{R}_1$ gleiche Gestalt, ist aber gegen diesen um 90^0 verdreht.

Fig. 54. a. b. u. c. **122. Aufg.** Es sollen der $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ eines Körpers, dessen Gestalt bestimmt ist, der aber gegen die $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ eine bestimmte Lage hat, gefunden werden.

Aufl. Es sei die $\mathfrak{E}$(efg) die Seite eines Körpers, auf welcher ein anderer Körper (abcd) mit einer Seite so liegt, dass, wenn man die Seite $\mathfrak{E}$(efg) als $\mathfrak{T}_3$ betrachtet und so umklappt, dass die $\mathfrak{K}'$ (hier der Schnitt von $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_3$) nach $\mathfrak{K}'_3$ kommt, die in der $\mathfrak{E}$(efg) liegende Seite unseres Körpers nach $a_3 b_3 c_3$

fällt. Ferner sei die Gestalt des Körpers (abcd) durch seinen $\mathfrak{R}_3$ und $\mathfrak{R}_4$ in derselben Weise bestimmt, wie dies bisher für das Tafelsystem $\mathfrak{T}_1\,\mathfrak{T}_2$ festgesetzt wurde.

Wir legen nun die $\mathfrak{T}_3$ und $\mathfrak{T}_4$ ebenso in die Ebene unseres Zeichnungsblattes, wie gewöhnlich die $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ (also so, dass $\mathfrak{K}''$ parallel zum vorderen Rande des Blattes ist, und dass hinter $\mathfrak{K}_4''$ die $+\,\mathfrak{T}_4''$ erscheint) und stellen die $\mathfrak{T}_4$ so, dass eine Umfangslinie, der in der $\mathfrak{T}_3$ liegenden Seite des Körpers, hier die $\mathfrak{G}$(ab), $\perp\,\mathfrak{T}_4$ ist. Wenn wir demnach d_4 hinter $\mathfrak{K}_4''$ annehmen, so setzen wir voraus, dass die $\mathfrak{D}_4''$, also auch der $\mathfrak{A}_3$ des $\mathfrak{P}$(d) positiv ist. Wie man darüber aus der Zeichnung Sicherheit gewinnt, das soll hier gezeigt werden. Haben wir die $\mathfrak{R}_3$ der gegebenen Punkte e, f, g und die $\mathfrak{R}_3$ der in der $\mathfrak{E}$(efg) liegenden Punkte a, b, c des Körpers (letztere durch die gegebene Lage derselben gegen e, f, g, z. B. durch die Entfernungen des $\mathfrak{P}$(a) von e und f) gezeichnet, ebenso den $\mathfrak{P}$(d) durch seinen $\mathfrak{R}_3$ und $\mathfrak{R}_4$, so suchen wir die $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ der Punkte a, b, c, d auf die bekannte Art mittelst der Nebenfigur. Wir werden also $\mathfrak{d}'\,d_3$ (Fig. c) nach $e\,d_3$ (Fig. b) tragen, in dieser Figur $d_3\,d \perp \mathfrak{K}\mathfrak{L}_3'$ errichten, und $d_3\,d$ der Länge und dem Vorzeichen nach gleich $\mathfrak{d}_4''\,d_4$ machen, wobei in unserer Zeichnung (Fig. b) $d_3\,d$ von d_3 aus gegen den stumpfen Winkel, den $+\,\mathfrak{K}\mathfrak{L}_3'$ mit $\mathfrak{K}\mathfrak{L}_1'$ einschliesst, gerichtet ist. Sollte nun $d_3\,d$ von d_3 aus gegen den spitzen Winkel (von $+\,\mathfrak{K}\mathfrak{L}_3'$ mit $\mathfrak{K}\mathfrak{L}_1'$) gerichtet werden, so müsste (in Fig. c) $d_4''\,d_4$ negativ genommen werden. Sobald man also die verschiedenen Vorzeichen festgestellt, und auch die Richtung von $d_3\,d$, so wird man mit Sicherheit das Vorzeichen von $\mathfrak{d}_4'\,d_4$, d. i. den $\mathfrak{A}_3$ des $\mathfrak{P}$(d) angeben können. Wie man weiter die $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ der Punkte findet, ist bekannt.

Anm. Hat man von dem gesuchten $\mathfrak{R}_1$ den Umfang ausgezogen, so darf man nur noch zusehen, ob der $\mathfrak{P}$(d) ein sichtbarer ist für die $\mathfrak{T}_1$; da aber hier aus dem $\mathfrak{R}_2$ dieses Punktes hervorgeht, dass er unter allen Punkten des Körpers abcd am weitesten entfernt ist von der $\mathfrak{T}_1$, so geht daraus klar hervor, dass er für diese Tafel sichtbar ist, und dass demnach die Linien $d_1\,a_1$, $d_1\,b_1$ und $d_1\,c_1$ auszuziehen sind. In dem $\mathfrak{R}_2$ unseres Körpers muss entschieden werden, ob $a_2\,c_2$ auszuziehen ist. Um dies zu erfahren, sucht man hier die zwei Punkte, welche beziehungs-

weise den Kanten a c und b d angehören, und die den Schnittpunkt von $a_2 c_2$ und $b_2 d_2$ zum $\mathfrak{R}_2$ haben; dann wird man finden, dass der der Kante b d gehörige Punkt der sichtbare für die $\mathfrak{T}_2$ ist (weil er der von dieser Tafel entferntere ist), dass daher $b_2 d_2$ ausgezogen und demnach $a_2 c_2$ gestrichelt werden muss.

128. Hat man einen Körper a u f z u n e h m e n, so nimmt man wo möglich die Tafeln so an, dass in der einen eine Seite des zu bestimmenden Körpers liegt, während man die andere Tafel zu einer Kante der in der ersteren Tafel liegenden Seite senkrecht annimmt. Diese Wahl der Tafeln ist nur dann nicht immer zulässig, wenn die eine zugleich dazu bestimmt ist, die Lage des Körpers gegen den Horizont anzugeben, d. h., wenn die $\mathfrak{T}_1$ horizontal angenommen wird. In diesem Falle werden wir eine $\mathfrak{T}_3$ und $\mathfrak{T}_4$ so bequem als möglich annehmen und dann mit Hilfe der $\mathfrak{R}_3$ und $\mathfrak{R}_4$ die $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ der zu bestimmenden Punkte aufsuchen (in der Art wie in voriger Num.).

Wie man auch die $\mathfrak{T}_1$ gewählt haben mag, so werden wir nun im Stande sein, den $\mathfrak{R}_1$ eines Punktes nebst seinem $\mathfrak{A}_1$ (also auch daraus seinen $\mathfrak{R}_2$) zu finden, ohne sein Loth eins (oder Loth zwei) wirklich zu errichten, also ohne besondere Apparate (z. B. Senkel) zu diesem Zwecke anzuwenden. Ist nemlich der zu zeichnende Punkt a

1) ein Punkt der $\mathfrak{T}_1$, so ist er selbst sein $\mathfrak{R}_1$ und sein $\mathfrak{A}_1$ ist $= 0$.

2) Fällt der $\mathfrak{R}_1$ des $\mathfrak{P}$(a) mit dem $\mathfrak{R}_1$ eines gegebenen Punktes b zusammen, so ist also sein $\mathfrak{R}_1$ bekannt, sein $\mathfrak{A}_1$ aber ist gleich dem $\mathfrak{A}_1$ des $\mathfrak{P}$(b) $+$ der (leicht messbaren) Entfernung der Punkte a und b.

3) Kann man die Entfernungen des $\mathfrak{P}$(a) von zwei auf der $\mathfrak{T}_1$ senkrechten Ebenen messen, so ist sein $\mathfrak{R}_1$ von den $\mathfrak{R}_1$ der Ebenen beziehungsweise eben so weit entfernt, als der $\mathfrak{P}$(a) von den Ebenen (s. 78. Satz).

4) Liegt der $\mathfrak{P}$(a) in einer schon bekannten Geraden, so braucht man nur seine Entfernung von einem bekannten Punkte derselben zu messen, um seinen $\mathfrak{R}_1$ (und $\mathfrak{A}_1$) erhalten zu können (s. 85.).

5) Liegt der $\mathfrak{P}$(a) in einer schon bekannten Ebene, so kann man die Entfernung desselben von zwei Punkten, oder zwei sich

schneidenden Geraden, oder von einem Punkt und einer Geraden, die in der Ebene liegen, messen, oder irgendwie nach planimetrischen Regeln seine Lage in der Ebene feststellen, und dann den $\mathfrak{R}_1$ (sowie den $\mathfrak{A}_1$) des $\mathfrak{P}(a)$ suchen (s. 90.).

6) Ist der $\mathfrak{P}(a)$ in keinem bisher aufgeführten besonderen Falle, so messen wir, wie weit er von drei schon bekannten Punkten in der $\mathfrak{T}_1$ oder, wenn das nicht möglich, wie weit er von irgend drei gegebenen Punkten entfernt ist; wie man daraus den $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ des Punktes erhält, ist früher (97. und 98.) gezeigt worden.

Anm. Es kommt bei einigen in dieser Num. angegebenen Verfahrungsarten zur Aufsuchung des $\mathfrak{R}_1$ eines Punktes vor, dass die gefundenen Entfernungen den gesuchten $\mathfrak{R}_1$ nicht vollkommen bestimmen, sondern dass es z. B. zwei Lagen giebt, die dieser $\mathfrak{R}_1$ einnehmen kann; man muss dann am Körper sehen, welcher der richtige $\mathfrak{R}_1$ ist.

129. Hat man den $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ eines Körpers, und will man die Entfernung zweier Eckpunkte, so kann man dies nach 76; will man die Grösse eines Winkels oder die Gestalt einer Seite, so betrachtet man ihre Ebene als $\mathfrak{T}_3$ und sucht, nachdem man diese $\mathfrak{T}_3$ umgeklappt hat, den $\mathfrak{R}_3$ dieses Winkels oder der Seite; will man den Winkel zweier Seiten, so kann man ihn nach 83. erhalten.

§. 10.

Durchschnitte von Körpern mit Ebenen, Geraden und Körpern.

130. Aufg. Den Durchschnitt einer $\mathfrak{E}(abc)$ mit einem Körper zu finden *). Fig. 56.

Aufl. Da alle Seiten des Körpers von der Ebene nach Geraden geschnitten werden, so ist der gesuchte Durchschnitt ein ebenes Vieleck; jedes Eck dieses Vielecks liegt demnach in zwei

*) Der Schüler wird gut thun, die Nummern 73—76, die wir zu den folgenden Aufgaben verwenden, noch einmal gründlich durchzugehen.

Seiten, also in einer Kante des Körpers. Man kann daher den gesuchten Schnitt finden, wenn man sucht, wo die Kanten des Körpers die gegebene Ebene schneiden, und diese Schnittpunkte so verbindet, dass jede Verbindungslinie einer Seite des Körpers angehört. Da aber jede Kante des Körpers eine begrenzte Linie ist, so wird der Schnittpunkt der die Kanten enthaltenden Geraden mit $\mathfrak{E}(abc)$ (s. 44. oder 45.) nur dann gelten, wenn er zwischen den Endpunkten der Kante liegt. Es werden daher viele Kanten die gegebene Ebene selbst dann nicht schneiden, wenn sie auch nicht parallel mit ihr sind. Kann man daher die Tafeln wählen, wie man will, so nimmt man eine von ihnen, z. B. die $\mathfrak{T}_1$, so an, dass sie auf der gegebenen Ebene senkrecht steht; dann ist der $\mathfrak{R}_1$ der Ebene eine Gerade (A_1) und ist nun aus dem $\mathfrak{R}_1$ unserer Figur leicht zu erkennen, dass die Kanten ab, ac, bc die $\mathfrak{E}(A_1)$ nicht mehr erreichen, während die Kanten da, db, dc die $\mathfrak{E}(A_1)$ in den Punkten e, f, g treffen, und hier das $\triangle$ efg die verlangte Schnittfigur ist.

Sind aber die beiden Tafeln so gegeben, dass die gegebene Ebene keine $\mathfrak{LE}$ ist, so wird man nicht wissen, welche Körperkanten die Ebene schneiden. Man kann dann allerdings von jeder einzelnen Kante den Schnitt mit der Ebene (nach 44. und 45.) aufsuchen; allein es werden eine Menge der gefundenen Punkte nicht (unter Umständen keiner) gelten, und man hat viele Operationen umsonst gemacht. Wie man diesem Uebel entgeht, wird weiter unten gezeigt werden. Zunächst wollen wir folgende Aufgabe, die mit Hilfe der vorliegenden Zeichnung gelöst werden kann, erledigen.

Fig. 56. 131. Aufg. Es sind gegeben ein Körper abcd und eine $\mathfrak{S}(A)$; gesucht ihre Schnittpunkte.

Aufl. Da jeder solche Schnittpunkt der Durchschnitt der $\mathfrak{S}(A)$ mit einer Seite ist, so hat man die Aufgabe zu lösen, den Durchschnitt der $\mathfrak{S}(A)$ mit allen Seiten aufzusuchen. Man sucht demnach den Durchschnitt der $\mathfrak{E}(A_1)$ mit unserem Körper; die Punkte h und i, wo diese Schnittfigur (efg) von der $\mathfrak{S}(A)$ geschnitten wird, sind dann die gesuchten Punkte.

Es giebt demnach so viele Schnittpunkte der $\mathfrak{S}(A)$ und des Körpers abcd, als die Fig. efg mit der $\mathfrak{S}(A)$ Punkte gemein hat; haben also letztere keinen Punkt gemein, so schneiden

sich die gegebenen Raumgrössen nicht. Ist die $\mathfrak{G}(A)$ begrenzt, so gilt natürlich nur der Schnittpunkt derselben mit der Fig·(efg), welcher zwischen ihren Grenzpunkten liegt.

Anm. Das Stück hi unserer $\mathfrak{G}(A)$, welches im Körper steckt, ist jedenfalls unsichtbar für die $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ und wird daher $h_1 i_1$ und $h_2 i_2$ jedenfalls gestrichelt, oder ganz weggelassen. Ebenso wird der $\mathfrak{R}_1$ unserer $\mathfrak{G}(A)$, so weit er nicht durch den $\mathfrak{R}_1$ unseres Körpers geht, sichtbar sein. Dagegen wird man eine Regel haben müssen, wie man es hinsichtlich des Ausziehens mit denjenigen Stücken der Risse unserer Geraden halten soll, welche zwischen einem Riss des $\mathfrak{P}(h)$ oder des $\mathfrak{P}(i)$ und dem Umfang des entsprechenden Risses unseres Körpers liegt. Da gilt nun, aus Gründen, die man leicht selbst finden kann, die Regel:

Das zwischen dem $\mathfrak{R}_1(h_1)$ des Schnittpunktes einer Geraden und dem Umfang des $\mathfrak{R}_1$ des (von der Geraden geschnittenen) Körpers liegende Stück des $\mathfrak{R}_1$ einer Geraden wird **zusammenhängend** ausgezogen, wenn der $\mathfrak{P}(h)$ in einer für die $\mathfrak{T}_1$ sichtbaren Seite des Körpers liegt.

132. Aufg. Den Schnitt eines Prisma's mit einer $\mathfrak{G}(A)$ = Fig. 60. zu finden.

Aufl. Stehen die Mantelflächen des Prisma's (wie in Fig. a) senkrecht zur $\mathfrak{T}_1$, so sind die $\mathfrak{R}_1$ der Mantelflächen die Geraden $a_1 b_1$, $b_1 c_1$, $c_1 d_1$, $d_1 a_1$ und der $\mathfrak{R}_1$ des ganzen Mantels ist daher der Umfang der Figur $a_1 b_1 c_1 d_1$, d. h. die gebrochene Linie $a_1 b_1 c_1 d_1 a_1$; wo nun diese von dem $\mathfrak{R}_1$ der $\mathfrak{G}(A)$ geschnitten wird, da ist der $\mathfrak{R}_1$ des Schnittpunktes der $\mathfrak{G}(A)$ mit dem Mantel des Prisma's. Es giebt also hier zwei Schnittpunkte, die sich sehr einfach finden lassen, weil der $\mathfrak{R}_1$ der von der $\mathfrak{G}(A)$ geschnittenen Körperoberfläche eine Linie ($a_1 b_1 c_1 d_1 a_1$) war.

Sind nun (Fig. b) die Mantelflächen des Prisma's nicht senkrecht auf einer Tafel, also der Riss des Mantels keine Linie, so nehmen wir ein Risssystem an, durch welches der Riss des Prismenmantels eine Linie wird. Wir wenden nemlich Strahlenrisse an, wählen die Strahlen ($\mathfrak{St}'$) so, dass sie parallel zu den Mantelkanten des Prisma's sind, und betrachten als $\mathfrak{T}'$ die $\mathfrak{E}(B_2)$, in welcher die Grundfläche abcd des Prisma's liegt.

Dann sind die Mantelkanten des Prisma's $\mathfrak{St}'$ (also ihre $\mathfrak{R}'$ die Punkte a, b, c, d), die Mantelflächen $\mathfrak{StE}'$ (also ihre $\mathfrak{R}'$ die Geraden ab, bc etc.) und der $\mathfrak{R}'$ des Prismenmantels die (gebrochene) Linie abcda. Suchen wir nun noch (nach 75.) den $\mathfrak{R}'$ der $\mathfrak{G}(A)$, nemlich A', so sind die Punkte e', f', in denen A' und der $\mathfrak{R}'$ des Prisma's (nemlich abcda) sich schneiden, die $\mathfrak{R}'$ der Schnittpunkte. Die Schnittpunkte (e, f) selbst liegen in den durch e' und f' gezogenen $\mathfrak{St}'$ (e' e, f' f) und in der $\mathfrak{G}(A)$.

Anm. Wäre der Körper eine Pyramide mit der Spitze s, so müssten unsere $\mathfrak{St}'$ so gewählt werden, dass sie durch $\mathfrak{P}(s)$ gehen, also Centralstrahlen sind; im übrigen wäre das Verfahren das gleiche.

Fig. 61. 133. Aufg. Den Schnitt einer $\mathfrak{E}(abc)$ mit einer Pyramide zu finden.

Aufl. Ist die Ebene, welche den Körper schneidet, keine $\mathfrak{LE}$, und können wir daher nicht erkennen, welche Kanten des Körpers die Ebene schneiden und welche nicht, so verfahren wir im Allgemeinen so, dass wir eine $\mathfrak{T}_3$ annehmen, die auf der ersten (oder zweiten) Spur der $\mathfrak{E}(abc)$ senkrecht steht, so dass die Ebene eine $\mathfrak{LE}_3$ wird, und lösen mittelst des Systems $\mathfrak{T}_1\,\mathfrak{T}_3$ die Aufgabe in der Art, dass wir den $\mathfrak{R}_3$ der $\mathfrak{E}(abc)$ und die $\mathfrak{R}_3$ aller Ecken des Körpers suchen, und nur in dem neuen Tafelsystem, in welchem die gegebene Ebene eine $\mathfrak{LE}$ ist, die Eckpunkte der Schnittfigur (nach 130.) suchen. Ist dies geschehen, so gehen wir zum alten System zurück, d. h. wir suchen aus den $\mathfrak{R}_3$ und $\mathfrak{R}_1$ der Punkte ihre $\mathfrak{R}_2$. Die Ausführung einer derartigen Aufgabe wollen wir dem Schüler überlassen.

Ist aber der Körper eine Pyramide (Fig. 61), deren Grundfläche in einer $\mathfrak{LE}$, z. B. in der $\mathfrak{E}(A_2)$ liegt, so ist es vortheilhafter, wenn man die gegebene $\mathfrak{E}(abc)$ (statt zur $\mathfrak{LE}$) zur $\mathfrak{StE}'$ macht (d. h. irgend eine Gerade derselben als $\mathfrak{St}'$ ansieht), und die $\mathfrak{E}(A_2)$ als $\mathfrak{T}'$ annimmt. Nehmen wir z. B. an, die $\mathfrak{St}'$ seien $\parallel \mathfrak{G}(ab)$, so ist die $\mathfrak{G}(B)$, nach welcher die $\mathfrak{E}(abc)$ die $\mathfrak{E}(A_2)$ schneidet, der $\mathfrak{R}'$ der $\mathfrak{E}(abc)$. Der $\mathfrak{R}'$ der Grundfläche (def) der Pyramide ist def selbst; wir suchen daher noch den $\mathfrak{R}'$ der Spitze s (indem wir durch s einen $\mathfrak{St}'$ legen und den Punkt s' suchen, in welchem dieser $\mathfrak{St}'$ die $\mathfrak{T}'$, d. h. die $\mathfrak{E}(A_2)$ schneidet). Sieht man nun zu, wo der $\mathfrak{R}'$ der $\mathfrak{E}(abc)$, (d. i. die $\mathfrak{G}(B)$) von

den $\mathfrak{R}'$ der einzelnen Körperkanten geschnitten wird, (hier von ds′, es′, fs′ in k′, h′, g′), so hat man die $\mathfrak{R}'$ der Schnittpunkte. Um nun aus g′ den Punkt g selbst zu erhalten, legen wir durch g′ einen $\mathfrak{St}'$ ($\parallel$ $\mathfrak{G}$(ab)) und suchen den Punkt g, in welchem dieser $\mathfrak{St}'$ die Kante sf schneidet. In ähnlicher Art finden wir h und k.

Anm. 1. Ist die $\mathfrak{E}$(abc) unbegrenzt, so verbinden wir die gefundenen Schnittpunkte, um den verlangten Schnitt zu erhalten. Ist die Ebene aber begrenzt, etwa durch ab, bc, ac, so gelten die Schnittlinien nur innerhalb der vorgezeichneten Grenzen (wie in unserer Figur der zusammenhängend ausgezogene Theil des $\mathfrak{R}_1$ des Schnittes zeigt).

Anm. 2. Hätten wir statt einer Pyramide ein Prisma, so würden wir das obige Verfahren behalten, nur würden wir, statt der Spitze s, einen beliebigen Punkt einer Mantelkante annehmen, und die $\mathfrak{R}'$ aller Mantelkanten parallel machen.

134. Aufg. Ein gegebenes dreiseitiges Prisma soll durch eine Ebene so geschnitten werden, dass die Schnittfigur einem gegebenen Dreieck ähnlich ist. Fig. 62.

Aufl. Wir nehmen die eine Tafel, z. B. die $\mathfrak{T}_1$ senkrecht zu den Mantelkanten des Prisma's an, so dass dessen $\mathfrak{R}_1$ zugleich sein Profil vorstellt.

a) Ist nun dieses Profil ein rechtwinkeliges Dreieck abc (Fig. a) und soll der Schnitt einem gegebenen rechtwinkeligen Dreieck ähnlich sein, so muss das Prisma durch eine Ebene geschnitten werden, die $\parallel$ $\mathfrak{G}$(ab) oder $\parallel$ $\mathfrak{G}$(ac), je nachdem der Winkel der Schnittfigur, welcher dem Winkel b des Prismenprofils entspricht, grösser oder kleiner als $\angle$ b ist. Soll in unserem Falle die Schnittfigur $\sim \triangle a_1 b_1 d_3$ werden, so schneiden wir das Prisma durch eine Ebene, welche $\mathfrak{G}$(ab) enthält und durch einen $\mathfrak{P}$(d) geht, für welchen $a_2 d_2 = a_1 d_3$ ist. Denn diese Ebene schneidet das Prisma offenbar nach einem Dreieck, dessen $\mathfrak{R}_3$ (wenn wir die Ebene als $\mathfrak{T}_3$ und ab als $\mathfrak{K}'$, um die wir umklappen, betrachten) $a_1 b_1 d_3$ ist.

b) Ist aber das Profil abc des Prisma's (wie in Fig. b) nicht rechtwinkelig, und ebenso wenig das $\triangle a_1 b_1 c'$, das der Schnittfigur ähnlich sein soll, so denken wir uns die schneidende Ebene gefunden, welche das Prisma $a_1 b_1 c_1$ nach einem Dreiecke ähnlich $a_1 b_1 c'$ schneidet, und behaupten, dass, wenn d_1 statt b_1, also

$\triangle$ a c d statt $\triangle$ a c b gegeben wäre, dieses Prisma von derselben Ebene nach einem Dreieck geschnitten würde, das ähnlich a d c′ ist *). Ebenso entspricht dem Prisma $e_1 b_1 c_1$ das $\triangle$ $e_1 b_1 c'$ etc. Setzen wir nun an die Stelle von a_1, b_1 zwei Punkte d_1, e_1 von der Art, dass gleichzeitig der $\angle$ $e_1 c_1 d_1$ und $\angle$ $e_1 c' d_1 = 90^0$ werden, so wird von der gefunden gedachten Ebene das Prisma $e_1 d_1 c_1$ nach einem Dreiecke geschnitten, das ähnlich $\triangle$ $e_1 d_1 c'$ ist, und da hier das Prisma sowohl, als das Dreieck rechtwinkelig sind, so lässt sich die Ebene (nach a) dieser Num.) finden. Es fragt sich daher nur, wie man die Punkte d_1, e_1 erhält. Da aber offenbar die Punkte e_1, c_1, d_1, c' einer Kreislinie angehören, deren Durchmesser $d_1 e_1$, so findet man den Mittelpunkt dieses Kreises, wenn man die Gerade $c' c_1$ senkrecht halbirt und den Punkt m sucht, in dem die Halbirungslinie die $a_1 b_1$ schneidet. Zeichnet man dann aus m mit m c′ eine Kreislinie, so schneidet sie die Gerade $a_1 b_1$ in den verlangten Punkten e_1, d_1.

135. Die Oberflächen zweier Körper schneiden sich nach einem Vieleck, dessen Seiten Gerade sind. Jede solche Seite ist der Durchschnitt einer Seite des ersten und einer Seite des zweiten Körpers; demnach gehört jeder Eckpunkt der Schnittlinie einer Kante des einen und einer Seite des andern Körpers an. Wir erhalten daher alle Ecken der gesuchten Schnittlinie (die übrigens nicht in einer Ebene zu liegen brauchen, und auch im Allgemeinen nicht darin liegen), wenn wir die Punkte suchen, in denen die Kanten des ersten Körpers den zweiten, und die, in denen die Kanten des zweiten Körpers den ersten schneiden. Verbindet man noch diese Punkte so, dass jede Verbindungslinie in

---

*) Denn hat das Dreieck, nach welchem das Prisma ($a_1 b_1 c_1$) von der Ebene geschnitten wird, die Gestalt $a_3 b_3 d_3^c$, welche $a_1 b_1 c'$ ähnlich ist, so wird dieselbe Ebene das Prisma ($a_1 b_1^c d_1$) nach einem Dreiecke $a_3 c_3 d_3$ schneiden, in welchem der Winkel a_3 und die Seite $a_3 c_3$ unverändert geblieben sind, aber $a_3 d_3$ in demselben Verhältnisse grösser als $a_3 b_3$ ist, wie $a_1 d_1$ grösser ist, als $a_1 b_1$. Macht man daher a b $\parallel$ a_3 b_3 und a b = $a_1 b_1$ (so dass $\triangle$ a b c_3 $\cong$ $a_1 b_1 c'$) und b d = $b_1 d_1$, so erhält man durch Zeichnung der Geraden c_3 d die Länge $a_3 d_3$. Da aber $\triangle$ a d c_3 $\cong$ $\triangle$ $a_1 d_1 c'$, so ist unsere Behauptung gerechtfertigt.

einer Seite des einen und anderen Körpers liegt, so erhält man die gesuchte Figur. Hat man für jeden Körper bestimmt, welche Seiten (unabhängig von dem anderen Körper) sichtbar sind für die $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$, so wird man die Seiten des $\mathfrak{R}_1$ unserer Schnittfigur ausziehen, welche für beide Körper in für die $\mathfrak{T}_1$ sichtbaren Seiten liegen, und die übrigen Seiten stricheln; ähnlich so hält man es mit dem $\mathfrak{R}_2$ der genannten Figur.

Anm. Um sich leicht merken zu können, welche Schnittpunkte verbunden werden dürfen, wird man gut thun, folgendermassen zu verfahren: Sucht man den Durchschnittspunkt der Seite abc des ersten Körpers mit der Kante mn (nach der sich die Seiten mno und mnp schneiden) des zweiten und nennen wir ihn $\mathfrak{P}(1)$ *), so liegt also dieser Punkt in abc des ersten und in den Seiten mno und mnp des zweiten Körpers. Man notire sich nun dies, lösche die zur Aufsuchung des $\mathfrak{P}(1)$ angewendeten Hilfslinien weg, suche den $\mathfrak{P}(2)$, notire sich ein Aehnliches, wie beim $\mathfrak{P}(1)$ u. s. w. Man wird dann aus den Notizen sehen, welche Punkte für beide Körper auf einer Seite liegen. Der bessern Uebersicht wegen macht man sich diese Notizen in der Art, dass man die Seiten des einen Körpers in eine Reihe schreibt, und unter jede Seite die in ihr liegenden Punkte; ebenso verfährt man mit einer zweiten Reihe für den zweiten Körper. Notirt man sich gleich zu jeder Seite der beiden Reihen, ob sie für die $\mathfrak{T}_1$ oder $\mathfrak{T}_2$ sichtbar oder unsichtbar ist, so weiss man gleich für jede Seite eines jeden Risses der Schnittfigur, ob sie ausgezogen wird oder nicht. (Die letztere Notiz wird man am Einfachsten so machen, dass man, wenn eine Seite des einen Körpers abc heisst, welche sichtbar für die $\mathfrak{T}_1$ und unsichtbar für die $\mathfrak{T}_2$ ist, in der obengenannten Reihe unter abc einen ausgezogenen, darüber einen gestrichelten Querstrich macht, wenn man sich vorgenommen hat, unten für die $\mathfrak{T}_1$ und oben für die $\mathfrak{T}_2$ zu notiren). Uebrigens kommen in der Anwendung selten andere Körper, als Prismen und Pyramiden vor; wie man aber

---

*) Man wird diese Schnittpunkte am Besten mit Ziffern bezeichnen, um sie von anderen Punkten zu unterscheiden.

für solche Körper die vorliegende Aufgabe vollständig löst, werden wir in den folgenden Nummern angeben.

Fig. 63. 136. Aufg. Den Durchschnitt zweier Prismen zu finden, wenn die Seitenkanten des einen Prisma's auf denen des andern senkrecht stehen und man die Tafeln beliebig wählen kann.

Aufl. Man nimmt in diesem Falle die Tafeln am Bequemsten so an, dass jede auf den Seitenkanten eines der beiden Prismen senkrecht steht. Dann ist für das auf der $\mathfrak{T}_1$ senkrechte Prisma der $\mathfrak{R}_1$ jeder Mantelfläche eine Gerade, der einer jeden Mantelkante ein Punkt, demnach der $\mathfrak{R}_1$ des Mantels die Linie $a_1 b_1 c_1 a_1$; ebenso ist der $\mathfrak{R}_2$ des Mantels des zweiten Prisma's die Linie $e_2 d_2 f_2 g_2 e_2$. Da ferner die Kanten der Grundfläche eines Prisma's auch in seinen Mantelflächen liegen, so haben die Grundflächen des ersten Prisma's zum $\mathfrak{R}_1$ die Figur $a_1 b_1 c_1$ (d. h. das von der Linie $a_1 b_1 c_1 a_1$ eingeschlossene Stück Tafel, also eine Fläche und nicht, wie der $\mathfrak{R}_1$ des Mantels, eine Linie). Die $\mathfrak{R}_2$ der Grundflächen haben wir (wie aus der Zeichnung ersichtlich ist) zur $\mathfrak{K}$ parallele Gerade sein lassen. Aehnlich so verhält es sich mit dem zweiten Prisma.

Suchen wir nun den Durchschnitt der beiden Prismen, so wird man aus unserer Fig. unmittelbar erkennen, dass von den Grundflächen unserer Prismen nur die obere des ersten Prisma's zum Durchschnitt kommt, und zwar sind l, m, n und o (l und m, sowie n und o haben gemeinschaftliche $\mathfrak{R}_2$) ihre Schnittpunkte mit dem Mantel des zweiten Prisma's. Sucht man nun noch die Schnittpunkte, welche in den Mantelkanten der Prismen liegen, (wobei durch die Lage derselben sich gleich herausstellt, ob eine solche Kante schneidet; so z. B. wird man unmittelbar erkennen, dass die Kanten a_1, c_1 und g_2 nicht zum Durchschnitt kommen), so hat man alle Eckpunkte der Schnittfigur und es handelt sich nun darum, sie in der rechten Ordnung zu verbinden (135.). Dies ist nun hier desshalb leicht, weil, mit Ausnahme der Punkte in einer Grundfläche, zwei Punkte der Schnittlinie nur dann für jede der beiden Flächen auf einer Seite liegen, wenn ihre $\mathfrak{R}_1$ in einer Seite des $\mathfrak{R}_1$ des ersten und ihre $\mathfrak{R}_2$ in einer des zweiten Prisma's liegen.

Benennen wir daher die gesuchte Schnittlinie dadurch (wie man es in der Elementar-Geometrie gewohnt ist), dass wir die

zur Bezeichnung ihrer Ecken benützten Buchstaben so neben einander schreiben, dass immer zwei auf einander folgende Buchstaben der nemlichen Seite der Figur angehören, so wird unsere Schnittlinie o n e d b f l m k i h o heissen, wodurch zugleich angezeigt ist, wie die Seiten unserer Schnittlinie heissen. Denn suchen wir z. B. mit welchen Punkten der $\mathfrak{P}$ (o) verbunden werden kann, so wird man finden, dass es blos die Punkte h und n sind. Denn dieser $\mathfrak{P}$ (o), welcher mit $\mathfrak{P}$ (n) auf der oberen Grundfläche des ersten Prisma's liegt und daher mit diesem verbunden werden muss, kann (nach dem $\mathfrak{R}_1$ des ersten Prisma's) nur noch verbunden werden mit h, i, m und k. Allein aus dem $\mathfrak{R}_2$ des zweiten Prisma's ergiebt sich, dass von diesen vier Punkten nur h genommen werden darf.

Anm. Wenn man nach dieser Regel die Benennung der gesuchten Schnittlinie aufsucht, so kann es sich treffen, dass man wieder zu dem Buchstaben gelangt, mit dem man angefangen hat, ohne dass man auf alle Schnittpunkte gestossen ist. In diesem Falle verfährt man mit den übrigen Schnittpunkten wieder nach obiger Regel u. s. w. Man wird daher in einem solchen Falle mehr als eine geschlossene Schnittlinie erhalten.

137. Aufg. Den Durchschnitt zweier Prismen zu finden, Fig. 64.
wenn die $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ willkührlich gewählt werden können.

Aufl. Man wählt in diesem Falle die Tafeln so, dass die $\mathfrak{T}_1$ auf den Mantelkanten des einen Prisma's senkrecht steht, und dass die $\mathfrak{T}_2$ zu einer Grundfläche senkrecht ist. Dann ist der $\mathfrak{R}_1$ des Mantels jenes Prisma's eine (gebrochene) Linie, hier die Linie $m_1 b_1 d_1 f_1 g_1 m_1$ und diese ist zugleich, soweit sie auch in dem $\mathfrak{R}_1$ des anderen Prisma's liegt, hier also die Linie $a_1 b_1 d_1 f_1 g_1$ der $\mathfrak{R}_1$ der gesuchten Schnittlinie. Denkt man sich ferner die Grundfläche des auf der $\mathfrak{T}_1$ nicht senkrechten Prisma's als $\mathfrak{T}'$ und sucht die Parallel-Risse der gesuchten Schnittpunkte mit Hilfe von $\mathfrak{St}'$, die zu den Mantelkanten dieses Prisma's parallel sind, so sind die $\mathfrak{R}_1$ dieser $\mathfrak{St}'$ parallel zu den $\mathfrak{R}_1$ der eben genannten Mantelkanten, und es sind daher a'_1, b'_1, c'_1 etc. die $\mathfrak{R}'_1$ der schiefen Risse der gesuchten Punkte (s. 73.). Sucht man hieraus die $\mathfrak{R}_2$ ($a'_2 b'_2 c'_2$ etc.) der schiefen Risse dieser Punkte, so kann man auch die $\mathfrak{R}_2$ der entsprechenden $\mathfrak{St}'$ zeichnen, und da,

wo sie von den entsprechenden $\mathfrak{R}\mathfrak{L}_2$ dieser Punkte getroffen werden, sind die $\mathfrak{R}_2$ unserer gesuchten Schnittpunkte. Schon aus den $\mathfrak{R}_1$ (a_1, b_1 etc.) und den $\mathfrak{R}_1$ (a'_1, b'_1 etc.) der schiefen Risse unserer Punkte lässt sich ersehen, dass sie in unserer Figur in der Ordnung a b d f g l e k c h a verbunden werden müssen; denn die Punkte müssen, wie schon oben erwähnt, so verbunden werden, dass jede Verbindungslinie auf einer Seite des einen und auf einer Seite des anderen Körpers liegen. Sind aber die beiden verbundenen Punkte auf einer Seite des zur $\mathfrak{T}_1$ senkrechten Prisma's, so liegen ihre $\mathfrak{R}_1$ auf einer Seite der Grundfläche dieses Prisma's. Sind die Punkte auf einer Mantelfläche des anderen Körpers, so liegen ihre $\mathfrak{R}'$ auf einer Seite der Grundfläche dieses Körpers (weil diese der $\mathfrak{R}'$ jener Mantelfläche ist). Ferner fallen die $\mathfrak{R}_1$ der Verbindungslinien dieser Punkte zusammen mit dem $\mathfrak{R}_1$ des auf der $\mathfrak{T}_1$ senkrechten Prisma's. Dagegen sind für die $\mathfrak{T}_2$ nur die Punkte b, a, h, f, g und l, sowie die Linien ba, ah, fg und gl sichtbar. Endlich werden (nach 134.) in der $\mathfrak{T}_2$ die Kanten b h, c e, f l und a g so gezeichnet, wie in vorliegender Fig., während d k gestrichelt wird, weil es aus bekannten Gründen in dem zur $\mathfrak{T}_1$ senkrechten Prisma unsichtbar ist für die $\mathfrak{T}_2$. Es bleibt daher nur noch übrig, anzugeben, wie man die Kanten zeichnet, welche nicht zum Durchschnitt kommen. Um darüber Aufschluss zu erhalten, darf man nur oben (114.—116.) nachsehen.

Anm. Man kann die vorliegende Auflösung auch für die Aufgabe benützen, wo der Durchschnitt eines Prisma's und einer Pyramide gesucht ist, wenn man wieder die $\mathfrak{T}_1$ senkrecht zu den Seitenkanten des Prisma's, die $\mathfrak{T}_2$ beliebig annimmt, und die $\mathfrak{St}'$ durch die Spitze der Pyramide gehen lässt.

Fig. 65. 138. Hat man den Schnitt zweier Pyramiden zu suchen, deren Grundflächen in einer $\mathfrak{LE}$ liegen, und sind diese Grundflächen an dem Durchschnitt nicht betheiligt, so dass man blos zu suchen hat, wo die Mäntel der beiden Körper sich schneiden, so suchen wir, wo die Kanten der ersten Pyramide die zweite und wo die Kanten der zweiten Pyramide die erste schneiden und benützen dazu die Aufgabe in Nr. 132, wenden also Strahlenrisse an.

Wir betrachten zu dem Ende die Mantelkanten der einen Pyramide als $\mathfrak{St}'$, die der anderen als $\mathfrak{St}''$ und die Ebene der beiden Grundflächen, hier die $\mathfrak{E}(A_2)$ als $\mathfrak{T}'$ und $\mathfrak{T}''$. Dann ist die Grundfläche a′ b′ c′ der einen Pyramide (a′ b′ c′ d) der $\mathfrak{R}'$ ihres Mantels, die Grundfläche e″ f″ g″ der Pyramide e″ f″ g″ h der $\mathfrak{R}''$ ihres Mantels *). Suchen wir nun, wo eine $\mathfrak{G}''$, z. B. die $\mathfrak{G}$(g″h), die $\mathfrak{P}'$ schneidet, so müssen wir den $\mathfrak{R}'$ von $\mathfrak{G}''$ suchen, und zu dem Ende in $\mathfrak{G}$(g″ h) einen Punkt, am Besten den $\mathfrak{P}$(h) (der auch den anderen $\mathfrak{G}''$ angehört) annehmen, durch ihn den $\mathfrak{St}'$, d. i. die $\mathfrak{G}$(dh) legen und den Punkt h′ suchen, in welchem $\mathfrak{T}'$ von $\mathfrak{G}$(dh) getroffen wird. Dieser Punkt h′ ist ein Punkt des $\mathfrak{R}'$ der angenommenen $\mathfrak{G}''$, aber auch (da der $\mathfrak{P}$(h) jeder $\mathfrak{G}''$ angehört) einer jeden $\mathfrak{G}''$. Da ausserdem der in der $\mathfrak{T}'$ liegende $\mathfrak{P}$(g″) der $\mathfrak{R}'$ eines Punktes der $\mathfrak{G}$(g″h) ist, so ist der $\mathfrak{R}'$ dieser Geraden die Linie h′ g″, und der Punkt g′, in welchem diese Linie dem $\mathfrak{R}'$ (a′ b′ c′ a′) des Mantels der $\mathfrak{P}'$ begegnet, ist der $\mathfrak{R}'$ des gesuchten Punktes g. Ebenso ist i′ der $\mathfrak{R}'$ eines Schnittpunktes i. Da die beiden Punkte g und i der $\mathfrak{G}$(g″h) angehören, und diese ein $\mathfrak{St}''$ ist, dessen $\mathfrak{R}''$ der Punkt g″, so sieht man, dass in g″ der $\mathfrak{R}''$ des Punktes g und des Punktes i liegt. In ähnlicher Weise behandeln wir die übrigen $\mathfrak{G}''$ **). Suchen wir jetzt, wo die $\mathfrak{G}'$ die $\mathfrak{P}''$ schneidet, so müssen wir den $\mathfrak{R}''$ der $\mathfrak{G}'$ suchen, und zu dem Ende in der $\mathfrak{G}'$ einen Punkt annehmen (am Besten den $\mathfrak{P}$(d), der allen $\mathfrak{G}'$ angehört) durch diesen Punkt einen $\mathfrak{St}''$, d. i. die $\mathfrak{G}$(dh) legen, und sehen, wo diese die $\mathfrak{E}(A_2)$ schneidet, wodurch wir wieder auf den Punkt h′ (den wir also auch mit d″ bezeichnen könnten) geführt werden. Wenn wir demnach suchen, wo die Verbindungslinie der beiden Pyramidenspitzen, hier die $\mathfrak{G}$(dh), die $\mathfrak{E}(A_2)$ schneiden, so ist dieser Schnittpunkt, hier h′, der $\mathfrak{R}'$ eines Punktes einer jeden $\mathfrak{G}''$ und der $\mathfrak{R}''$ einer jeden $\mathfrak{G}'$.

---

*) Wir wollen die erste dieser Pyramiden mit $\mathfrak{P}'$, die zweite mit $\mathfrak{P}''$ bezeichnen; ferner die Mantelkanten der ersten Pyramide mit $\mathfrak{G}'$, die der anderen mit $\mathfrak{G}''$.

**) Wir überlassen die weitere Ausführung der Zeichnung dem Schüler, und bemerken nur, dass bei der Behandlung der $\mathfrak{G}$(e″h) sich herausstellen wird, dass sie die $\mathfrak{P}'$ nicht schneidet.

Ziehen wir daher, wie schon oben angegeben, h′ g″, so ist dies der ℜ′ einer ℭ″ und wo diese die Grundlinie (a′ b′ c′ a′) der ℘′ trifft, ist der ℜ′ einer Ecke der gesuchten Schnittfigur. Aber ebenso finden wir den ℜ″ eines solchen Punktes, wenn wir h′ b′ ziehen und suchen, wo diese Linie die Grundlinie der ℘″ schneidet.

Haben wir von einem Eckpunkte der Schnittfigur den ℜ′ und ℜ″, z. B. g′ und g″ gefunden, und soll daraus der ℘(g) gesucht werden, so legen wir durch g′ den ℭt′, d. h. eine nach dem ℘(d) führende Gerade, und durch g″ den ℭt″ (d. h. die ℭ(g″ h)) und der Schnitt dieser beiden Strahlen (von denen einer eine Kante des einen Körpers ist) ist der ℘(g).

Die Ordnung, in welcher sämmtliche Ecken der Schnittfigur verbunden werden müssen, finden wir wieder dadurch, dass nur solche Punkte verbunden werden dürfen, deren ℜ′ auf einer Seite der Grundfläche von ℘′ und deren ℜ″ zugleich auf einer Seite der Grundfläche von ℜ″ liegen. Ferner sind in Bezug auf die $\mathfrak{T}_1$ die Mantelfläche deren ℜ′ b′ c′ und die deren ℜ″ e″ f″ ist, unsichtbar; in Bezug auf die $\mathfrak{T}_2$ sind die Mantelflächen a′ c′ d und f″ g″ h unsichtbar.

Anm. Wäre Alles wie oben, nur dass statt der einen Pyramide, z. B. der ℘″, ein Prisma gegeben wäre, dann fiele die Spitze der ℘″ in unendliche Entfernung und müssten wir daher statt der ℭ(dh) durch d eine Gerade ziehen, die mit den Mantelkanten des Prisma's parallel laufen, und wieder suchen den Punkt h′, in welchem diese Gerade die ℰ(A_2) schneidet. Alles Uebrige bliebe wie oben.

Wären aber statt der beiden Pyramiden zwei Prismen gegeben, so fiele auch h′ in unendliche Ferne, d. h. es wären die ℜ′ der ℭ″ und die ℜ″ der ℭ′ parallel. Wir müssten dann eine Ebene annehmen, die zu beiden Prismen parallel ist, und den Schnitt dieser Ebene mit ℰ(A_2) suchen. Diese Schnittlinie gäbe die Richtungen der ℜ′ von ℭ″ und der ℜ″ von ℭ′ an.

Fig. 66. 139. Aufg. Es sind gegeben zwei beliebige Pyramiden, die sich mit ihren Mantelflächen durchschneiden; man sucht ihre Schnittfigur.

Aufl. Man wählt die als frei wählbar vorausgesetzten Tafeln so, dass die eine Tafel, hier die $\mathfrak{T}_2$, senkrecht steht auf der

$\mathfrak{G}(k_2)$, nach welcher die $\mathfrak{E}(A_2)$ und $\mathfrak{E}(B_2)$, in denen die Grundflächen der Pyramiden liegen, sich schneiden; die andere Tafel, hier die $\mathfrak{T}_1$ so, dass sie mit $\mathfrak{E}(A_2)$ (oder mit B_2) parallel ist.*)

Nennen wir wieder die eine Pyramide, deren Grundfläche in $\mathfrak{E}(A_2)$ liegt, die $\mathfrak{P}'$ und ihre Mantelkanten die $\mathfrak{G}'$, die andere die andere die $\mathfrak{P}''$ und ihre Mantelkanten die $\mathfrak{G}''$.

Wir könnten nun die vorliegende Aufgabe auf die vorige zurückführen, wenn wir den Schnitt der $\mathfrak{P}''$ mit der $\mathfrak{E}(A_2)$ suchten, und diesen Schnitt als Grundfläche der $\mathfrak{P}''$ betrachteten, so dass die beiden Grundflächen wieder in einer $\mathfrak{E}(A_2)$ lägen. Allein theils um die Zeichnung der neuen Grundfläche zu umgehen, theils, weil oft die Ecken dieser Grundfläche über die Grenzen des Zeichnungsblattes hinausfallen, wollen wir unsere Aufgabe ohne neue Grundfläche zu lösen suchen.

Betrachten wir die Lösung der vorigen Aufgabe näher, so haben wir eigentlich, um einen Eckpunkt der Schnittfigur zu finden, durch die beiden Pyramidenspitzen d, h und eine Mantelkante $(g'' h)$ eine Ebene $(d g'' h)$ gelegt und den Schnitt dieser Ebene mit der $\mathfrak{E}(A_2)$, in welcher beide Grundflächen liegen, gesucht. Jetzt werden wir suchen müssen, wo diese Ebene $(d g'' h)$ die $\mathfrak{E}(A_2)$ und die $\mathfrak{E}(B_2)$ trifft, oder wo die Verbindungslinie (dh) der beiden Spitzen d und h diese beiden Ebenen schneidet.

Suchen wir daher (Fig. 66, in welcher wir die Bezeichnungen wie in voriger Figur gelassen haben) die Punkte d'' und h', nach denen die $\mathfrak{G}(dh)$ die Ebenen A_2 und B_2 schneidet, und nehmen wir wieder die $\mathfrak{E}(d g'' h)$ an, so schneidet diese die $\mathfrak{E}(B_2)$ nach $d'' g''$ und die $\mathfrak{E}(A_2)$ nach der Geraden $h' g'$, welche die $\mathfrak{G}(g'' d'')$ in einem Punkte k der Schnittlinie (k_2) der Ebenen A_2 und B_2 begegnet. Mit anderen Worten jede durch $\mathfrak{G}(dh)$ gelegte Ebene schneidet die beiden Ebenen A_2 und B_2 nach einer einmal gebrochenen Linie $h' k d''$, deren Brechungspunkt k in der Schnittlinie von $\mathfrak{E}(A_2)$ und $\mathfrak{E}(B_2)$ liegt (während in der vorigen Figur, statt der gebrochenen, eine Gerade erschien). Alles andere bleibt wie in der vorigen Nr.

---

*) Ist die $\mathfrak{T}_1$ aber nicht so gewählt, so macht das an dem folgenden Gange keine Aenderung.

Die Aufgabe modifizirt sich, für den Fall zwei Prismen oder Pyramide und Prisma gegeben sind, in ähnlicher Art, wie in voriger Nr.

Anm. Wäre die Aufgabe ganz allgemein gegeben, wären nemlich die Ebenen der Grundflächen unserer Körper keine $\mathfrak{LE}$, so wäre der Gang der Auflösung derselbe. Man müsste nemlich auch wieder die Schnittlinie der beiden Ebenen der Grundflächen, und die Punkte suchen, in den diese Ebenen von $\mathfrak{S}$ (dh) geschnitten werden (und diese Operationen wären, weil die Ebene keine $\mathfrak{LE}$ sind, etwas umständlicher, als oben). Im Uebrigen bliebe Alles wie oben.

140. Sieht man voraus, oder zeigt es sich bei der Lösung der Aufgabe über den Schnitt zweier Körper (Prismen oder Pyramiden), dass eine Grundfläche beim Schnitt betheiligt ist, so sucht man den Schnitt dieser Grundfläche des einen Körpers mit dem andern (nach Nr. 133.).

141. Will man von einer Seitenfläche die wahre Gestalt derselben (mit Einschluss der darin liegenden Schnittlinie), so darf man nur diese Seite als $\mathfrak{T}_3$ betrachten, umklappen und die $\mathfrak{R}_3$ aller ihrer Punkte und Linien zeichnen.

Anhang.

Die darstellende Geometrie setzt die Kenntniss der Elementargeometrie voraus; besonders wichtig für sie sind die Erklärungen und Sätze, die wir hier folgen lassen und mit denen sich der Schüler vor Beginn des Unterrichtes in der darstellenden Geometrie vertraut machen muss. Wir haben es überflüssig gefunden, denjenigen Sätzen, welche in jedem guten Lehrbuch der Geometrie zu finden sind, die Beweise beizufügen.

NB. Wir denken uns in dem Folgenden die Ebene und die Gerade völlig unbegrenzt.

1. Durch drei Punkte, die nicht in einer Geraden liegen; durch eine Gerade und einen ausser ihr liegenden Punkt; durch zwei sich schneidende und durch zwei parallele Gerade ist stets eine Ebene, aber nur eine einzige, möglich.

2. Wenn zwei Gerade weder parallel sind, noch sich schneiden, so nennt man sie sich kreuzende oder windschiefe Gerade. Durch zwei solche Gerade ist keine Ebene möglich. Unter dem Winkel zweier solcher Geraden verstehen wir den Winkel, den zwei sich schneidende Gerade bilden, die mit den sich kreuzenden beziehungsweise parallel sind.

3. Zwei Ebenen schneiden sich nach einer Geraden; man nennt sie die Kante der beiden Ebenen.

4. Eine Gerade und eine Ebene schneiden sich nach einem Punkt; man nennt ihn den Fusspunkt der Geraden auf der Ebene.

5. Hat eine Gerade mit einer Ebene zwei Punkte gemein, oder hat sie mit ihr einen Punkt gemein und ist sie zu gleicher Zeit parallel zu einer in der Ebene liegenden Geraden, so liegt sie in der Ebene.

6. Bewegt man eine Gerade so fort, dass sie eine gegebene Gerade A schneidet und zugleich entweder durch einen festen Punkt a geht, oder sich selbst parallel bleibt, so erzeugt sie eine Ebene.

7. Wenn zwei Ebenen sich nach einer Geraden A schneiden, so wird jede von ihnen durch A in zwei Theile getheilt, die wir Ebenenhälften nennen wollen. Ferner theilen sie den unendlichen Raum in vier Theile, die man Flächenwinkel nennt. Jeder solche Winkel wird von zwei Ebenenhälften gebildet, die man seine Schenkel nennt. Sind die vier von zwei sich schneidenden Ebenen gebildeten Flächenwinkel einander gleich, so nennt man jeden von ihnen einen Rechten und sagt von den Ebenen: sie stehen auf einander senkrecht.

8. Hat man drei Ebenen E_1, E_2, E_3 und schneiden sich E_1 und E_2 nach der Linie K_3, E_2 und E_3 nach K_1, E_3 und E_1 nach K_2, so müssen K_1 und K_2, weil sie beide in E_3 liegen, sich schneiden oder parallel sein. Schneiden sie sich in einem Punkte a, so liegt a in E_1, E_2 und E_3, also auch in K_3. Ist aber $K_1 \parallel K_2$, so können sich auch K_3 und K_1 nicht schneiden, weil sonst der Schnittpunkt in E_1, E_2 und E_3, also auch in K_1 und K_2 liegen müsste, und daher nicht $K_1 \parallel K_2$ wäre. Man sieht demnach, dass, wenn drei Ebenen sich nach drei Kanten schneiden, diese Kanten entweder in einem einzigen Punkte zusammenkommen, oder alle drei parallel sind.

9. Wenn eine Gerade gegen eine Ebene so steht, dass sie mit allen durch ihren Fusspunkt gehenden und in der Ebene liegenden Geraden rechte Winkel bildet, so nennt man sie eine Senkrechte oder ein Loth zur Ebene.

10. Wenn zwei Ebenen, oder eine Gerade und eine Ebene sich nicht schneiden, so sagt man: sie sind parallel.

11. Ein Loth zu einer Ebene steht auf allen Geraden der Ebene (auch auf denen, die nicht durch seinen Fusspunkt gehen) senkrecht. Um sich davon zu überzeugen, denke man sich in der Ebene, auf welcher das Loth L senkrecht steht, eine beliebige Gerade A gezogen. Zieht man nun in der Ebene durch den Fusspunkt von L eine Gerade B parallel zur Geraden A, so wird (nach 2.) der Winkel von A und L gemessen durch den Winkel von B und L; da nun dieser ein Rechter ist, so ist es auch jener.

12. Durch einen Punkt kann man zu einer Ebene nur ein Loth ziehen.

13. Durch einen Punkt kann man zu einer Ebene nur eine parallele Ebene legen.

14. Durch einen Punkt a kann man unzählige Ebenen legen, die auf einer Ebene E senkrecht stehen; alle diese Ebenen enthalten das durch a gehende Loth zur Ebene E.

15. Durch einen Punkt a kann man zu einer Ebene E unzählig viele Parallele ziehen; alle diese Parallelen liegen in einer durch a gehenden mit E parallelen Ebene.

16. Ist eine Gerade A ein Loth zu einer Ebene E, so ist jede, die Gerade A enthaltende Ebene senkrecht zur Ebene E.

17. Sind zwei Ebenen parallel, so ist jede Gerade der einen Ebene parallel zur andern, und es werden daher zwei parallele Ebenen von einer dritten Ebene nach Parallellinien geschnitten.

18. Ist eine Gerade A nicht senkrecht zu einer Ebene E, so kann man durch A nur eine einzige zu E senkrechte Ebene legen.

19. Ist eine Ebene E_1 nicht parallel zu einer Ebene E_2, schneiden sich also diese Ebenen nach einer Geraden K, so ist nur die Gerade in E_1, welche $\parallel$ K ist, parallel zu E_2.

20. Ist eine Gerade A auf zwei sich schneidenden Geraden einer Ebene E senkrecht oder ist A der Durchschnitt zweier auf E senkrechter Ebenen, so ist auch A $\perp$ E.

21. Ist eine Ebene E_1 parallel zu zwei sich schneidenden Geraden einer Ebene E_2, oder liegen in E_1 zwei sich schneidende Gerade, die parallel sind zu E_2, so ist $E_1 \parallel E_2$. Sind zwei Parallellinien der E_1 parallel zu E_2, so können E_1 und E_2 sich schneiden.

22. Wenn zwei Ebenen E_1, E_2 auf einander senkrecht stehen und sich nach $\mathfrak{R}$ schneiden, und eine Gerade A ist $\perp \mathfrak{R}$ und zugleich entweder parallel zu E_2 oder liegt in E_1, so ist A $\perp$ E_1.

23. Wenn eine Gerade A senkrecht steht auf den Ebenen E_1 und E_2, so ist $E_1 \parallel E_2$.

24. Wenn eine Gerade A und eine Ebene E_1 senkrecht stehen auf einer Ebene E_2, so ist A $\parallel$ E_1, oder es liegt A in E_1.

25. Wenn zwei Ebenen parallel sind, so ist ein Loth zur einen Ebene auch senkrecht zur andern.

26. Ist eine Gerade A senkrecht zu einer Ebene E, und eine Gerade B $\parallel$ A, so ist auch B $\perp$ E.

27. Stehen zwei Gerade auf der nemlichen oder auf parallelen Ebenen senkrecht, so sind die Geraden parallel.

28. Ist eine Gerade parallel zu zwei Ebenen, so ist sie es auch zu deren Kante.

29. Ist eine Gerade A parallel zu einer Ebene E_1, und legt man durch A eine Ebene E_2, die E_1 nach der Geraden B schneidet, so ist B || A.

30. Wenn eine Gerade A parallel ist zu einer Geraden B einer Ebene E, so ist A || E.

31. Wenn eine Gerade A senkrecht steht auf einer Geraden B (s. oben 2.), so kann man durch B eine Ebene legen, die ⊥ A ist, und umgekehrt.

32. Durch einen Punkt a kann man unzählige Gerade legen, die auf einer Geraden A senkrecht stehen; alle jene Geraden liegen in einer Ebene, die durch a geht und ⊥ A ist.

33. Legt man durch zwei Parallellinien A, B einer Ebene E die Ebenen E_1, E_2 senkrecht zur E, so ist E_1 || E_2.

34. Ist eine Ebene E parallel zu einer Geraden A und legt man durch einen Punkt der E eine Linie B || A, so liegt B in E.

35. Sind zwei Ebenen auf einander senkrecht und legt man durch einen Punkt der einen Ebene ein Loth zur zweiten, so liegt dieses in der ersten.

36. Sind zwei Ebenen parallel und legt man durch einen Punkt der einen eine Parallellinie zur anderen, so liegt sie in der ersten Ebene.

37. Sind eine Ebene E und eine Gerade A auf einander senkrecht, und legt man durch einen Punkt der E eine Gerade B ⊥ A, so liegt B in E.

38. Sind zwei sich schneidende Gerade A, B zu zwei sich schneidenden Geraden C, D beziehungsweise parallel, so ist der von A und B gebildete spitze Winkel gleich dem von C und D gebildeten, und ist die Ebene, in welcher A und B liegen, parallel zu der von C und D.

39. Sind zwei sich schneidende Ebenen E_1, E_2 resp. parallel zu den Ebenen E_3, E_4, so sind die spitzen Flächenwinkel, die E_1

und E_2 einerseits und E_3 und E_4 andererseits bilden, einander gleich; ferner ist dann die Kante von E_1 und E_2 parallel zu der von E_3 und E_4.

40. Die Entfernung eines Punktes von einer Ebene wird erhalten, wenn man durch den Punkt ein Loth zur Ebene legt, und von dem Punkt bis zum Fusspunkt des Lothes misst.

41. Die Entfernung einer Geraden A von einer zu ihr parallelen Ebene E ist gleich der Entfernung eines Punktes der Geraden von der Ebene E. Ebenso ist die Entfernung zweier paralleler Ebenen gleich der Entfernung eines Punktes der einen Ebene von der anderen.

42. Die Entfernung einer Geraden A von einer sie kreuzenden Geraden B wird gefunden, wenn man eine Ebene E annimmt, die die A enthält und mit B parallel ist; die Entfernung der B von der E ist dann gleich der Entfernung der sich kreuzenden Geraden A und B.

43. Der Winkel einer Geraden A mit einer Ebene E ist gleich dem Winkel, den A mit der Geraden B bildet, nach welcher E von einer durch A gehenden zu E senkrechten Ebene geschnitten wird. Es ist daher der spitze Winkel, der von A und E gebildet wird, der Complementswinkel desjenigen spitzen Winkels, den A mit einem Loth zur E bildet.

44. Der Winkel zweier Ebenen wird gemessen durch den Winkel, den die Geraden bilden, nach denen die Ebenen von einer zu ihnen senkrechten Ebene geschnitten werden.

45. Hat man zwei Ebenen E_1, E_2, die einen spitzen Winkel W mit einander bilden, und ist eine Gerade $A \perp E_1$, so ist der spitze Winkel, den A mit E_2 bildet, gleich einem Rechten weniger W.

46. Nimmt man zwischen den Schenkeln eines Flächenwinkels einen Punkt a an und zieht von ihm aus Lothe zu diesen Schenkeln, welche diese resp. in den Punkten b, c treffen, so ist die Summe des Flächenwinkels und des $\wedge$ bac gleich zwei Rechten. Denn die $\mathfrak{E}$(abc) steht senkrecht auf der Kante unseres Flächenwinkels und schneidet diese in einem Punkte d. Denkt man sich daher db und dc gezogen, so erhält man ein Viereck, in welchem $\wedge$ bdc gleich dem Flächenwinkel ist, wäh-

rend die Winkel dba und dca Rechte sind. Da aber die vier Winkel unseres Vierecks = 4 R sind, so ist $\angle$ bdc + $\angle$ bac = 2 R.

47. Steht eine Ebene auf einer Geraden ab in ihrem Mittelpunkte senkrecht, so ist jeder Punkt der Ebene gleichweit entfernt von den Punkten a und b.

48. Halbirt man einen Flächenwinkel durch eine Ebene, so ist jeder Punkt dieser Ebene gleichweit entfernt von den Schenkeln des Flächenwinkels.

49. Denkt man sich von einem Punkte a aus beliebig viele Gerade A, B, C etc. gezogen und durch A und B, B und C, C und D etc. Ebenen gelegt, welche von den genannten in ihnen liegenden Geraden begrenzt werden, so nennt man das dadurch erhaltene Gebilde ein Raumeck, Eck, Spitze oder Vielkant, den ℘ (a) seinen Scheitel, die Geraden A, B etc. seine Kanten, die Winkel, welche A und B, B und C etc. bilden, seine Seiten, die Winkel, welche die Ebenen zweier unmittelbar auf einander folgender Seiten bilden, die Winkel des Ecks. Ferner nennt man dieses Gebilde ein 3, 4, 5 etc. seitiges Eck, oder ein 3, 4, 5 etc. kant, je nachdem es 3, 4, 5 etc. Seiten oder Kanten hat. Endlich nennt man jede Ebene, welche zwei Kanten des Ecks enthält, ohne mit einer Seite desselben zusammenzufallen, eine Diagonalebene.

50. Denkt man sich von einem Punkte a aus drei Gerade A, A′, A″ gezogen, welche nicht in einer Ebene liegen, so nennt man dieses Gebilde ein Dreikant, und zwar das Dreikant AA′A″; die Geraden A, A′, A″ seine Kanten, a seinen Scheitel. Ferner nennt man den hohlen Winkel, welcher von zwei Kanten des Dreikants gebildet wird, eine Seite desselben, so dass das Dreikant die drei Seiten AA′, AA″ und A′A″ hat. Je zwei Kanten des Dreikants bestimmen eine Ebene, und je zwei solcher Ebenen bilden einen hohlen Winkel, dessen Kante eine Kante des Dreikants ist, und der schlechtweg Winkel des Dreikants genannt wird. Wir wollen diese Winkel mit dem Buchstaben α bezeichnen und diesem Buchstaben so viele Accente (Striche rechts oben) geben, als der Buchstabe A hat, der seine Kante bezeichnet, so dass die Winkel des Dreikants, die A, A′, A″ zu Kanten haben, nach einander mit α, α' α'' bezeichnet werden.

51. Nimmt man in dem Raume, der von den drei das Dreikant bildenden Ebenen eingeschlossen wird, einen Punkt b an, und fällt von ihm aus auf die Seiten AA′, AA″, A′A″ nach einander die Senkrechten B″, B′, B *), so erhält man ein neues Dreikant, dessen Seiten BB′, BB″, B′B″ (nach 46.) nach einander gleich den Supplementswinkeln von α'', α', α sind. Da aber B $\perp$ A′A″ und B′ $\perp$ AA″, so ist auch BB′ $\perp$ A″ (s. 16. und 20). Ebenso ist A′ $\perp$ BB″ und A $\perp$ B′B″. Nennen wir daher die an den Kanten B, B′, B″ gebildeten Winkel nach einander β, β', β'', so sind auch die Seiten BB′, BB″, B′B″ Supplemente zu den Winkeln β'', β', β. Man nennt daher von diesen Dreikanten das eine das Supplementar- (Ergänzungs-) Dreikant des anderen.

52. Die Summe zweier Seiten eines Dreikants ist stets grösser, als die dritte Seite.

53. Die Summe der Seiten eines Dreikants ist stets grösser als 0^0 und kleiner als 360^0.

54. Da eine Seite des Dreikants der hohle Winkel zweier Kanten ist, so ist jede Seite $> 0^0$ und $< 180^0$. Ebenso ist jeder Winkel des Dreikants $> 0^0$ und $< 180^0$. Betrachtet man nun ein gegebenes Dreikant, z. B. das (AA′A″) als Supplementardreikant eines Dreikants (BB′B″), so ist (wenn wir die oben (50.) eingeführte Bezeichnueg beibehalten) $\alpha'' = 180^0 - BB'$, $\alpha' = 180^0 - BB''$, $\alpha = 180^0 - B'B''$, und demnach $\alpha'' + \alpha' + \alpha = 540^0 - (BB' + BB'' + B'B'')$. Da aber $BB' + BB'' + B'B'' > 0^0$ und $< 360^0$, so ist $\alpha'' + \alpha' + \alpha < 540^0$ und $> 180^0$. Es ist also die Summe der Winkel eines Dreikants stets kleiner als 6 Rechte und stets grösser als 2 Rechte.

55. Ein Dreikant ist bestimmt (theils eindeutig, theils zweideutig), wenn von den 3 Seiten und 3 Winkeln desselben, die zusammen 6 Stücke bilden, 3 Stücke gegeben sind.

56. Einen von lauter Ebenen begrenzten Körper nennt man ein Polyeder. Jede Grenzfläche desselben ist eine ebene Figur

---

*) Man wird bemerken, dass die Senkrechte so viel Accente hat, als die Kante des Dreikants, die in der Ebene, anf der jene senkrecht steht, nicht liegt; z. B. B″ so viel als A″, welche in der Seite AA′ nicht liegt.

und wird seine Seite genannt; den Durchschnitt zweier Seiten nennt man eine Kante des Polyeders, und den Punkt, in dem mehrere Kanten zusammenstossen, ein Eck desselben.

57. Hat ein Polyeder drei oder mehr parallele Kanten, deren Endpunkte sämmtliche Ecken des Körpers bilden, so nennt man diesen Körper ein Prisma. Die Anfangspunkte sowie die Endpunkte der parallelen Kanten bilden gewöhnlich eine ebene (mitunter unebene) Figur, die man die Grundfläche des Prisma's nennt, die übrigen Seiten (in denen also parallele Kanten liegen) heisst man die Mantelflächen, die parallelen Kanten die Mantelkanten, die Kanten in den Grundflächen die Grundkanten, den Inbegriff aller Mantelflächen den Mantel des Prisma's, und das Prisma so vielseitig, als es Mantelflächen oder Mantelkanten hat

Liegen die beiden Grundflächen eines Prisma's in parallelen Ebenen, so nennt man es ein schiefes oder senkrechtes, je nachdem diese Ebenen schief oder senkrecht zu den Mantelkanten stehen.

Sind die Grundflächen eines Prisma's Parallelogramme, die in parallelen Ebenen liegen, so nennt man das Prisma ein Parallelopiped.

58. Schneidet man ein Prisma durch zwei parallele Ebenen, welche alle Mantelkanten (s. 57.) durchschneiden, so sind ihre Schnitte kongruente Figuren, die so viele Seiten haben, als das Prisma Mantelflächen hat. Steht eine solche Schnittebene zugleich senkrecht auf den Mantelflächen, so nennt man ihren Durchschnitt mit dem Prisma das Profil des Prisma's.

59. Schneiden sich drei oder mehr Kanten eines Polyeders wirklich oder in ihren Verlängerungen in einem Punkte, und sind die Endpunkte dieser Kanten zugleich sämmtliche Ecken des Körpers, so nennt man den Körper eine Pyramide, die sich schneidenden Kanten die Mantelkanten, die durch je zwei auf einander folgende Mantelkanten gehenden Seiten die Mantelflächen der Pyramide.

Kommen die Mantelkanten wirklich in einem Punkte zusammen, so nennt man diesen Punkt die Spitze. Die anderen Endpunkte der Mantelkante, die gewöhnlich in einer Ebene liegen, bilden die Grundfläche der Pyramide. Schneiden sich

die Mantelkanten nicht wirklich (sondern erst in der Verlängerung) in einem Punkte, so hat die Pyramide zwei Grundflächen.

Schneidet man eine Pyramide durch zwei parallele Ebenen, so sind die Schnitte ähnliche Figuren.

60. Hat ein Körper zwei parallele Seitenflächen, deren Seitenlinien beziehungsweise parallel laufen, während die übrigen Seitenflächen Parallel-Trapeze sind, so heisst der Körper ein Obelisk; die parallelen Seitenflächen nennt man die Grundflächen, die Trapeze die Mantelflächen des Obelisk.

61. Legt man die Seiten eines Raumecks oder eines Körpers so in eine Ebene, dass immer zwei Seiten die Kante gemein haben, mit der sie am Raumeck oder resp. Körper selbst zusammenstossen, so nennt man die dadurch erhaltene Zeichnung das Netz des Raumecks oder resp. des Körpers.

62. Zum Schlusse geben wir hier noch die Auflösung einer Aufgabe, der man in der darstellenden Geometrie mitunter vortheilhaft anzuwenden Gelegenheit hat. Wir meinen die Aufgabe, einen Punkt oder eine Gerade in einer begrenzten Ebene zu finden, die zu Punkten oder Linien, die in dieser Ebene, aber ausserhalb ihrer Grenzen, liegen, in bestimmten Beziehungen steht. Wir wollen die Lösung dieser Aufgabe an folgendem speziellen Fall zeigen:

Aufg. Es ist ein Punkt gesucht, der von den (ausserhalb der Grenzen der Figur mnop liegenden) Punkten, in denen sich die Geraden A und B und die Geraden A und C schneiden, gegebene Entfernungen hat (Fig. 67.).

Aufl. Man nehme in unserer Ebene mnop einen Punkt an, am Besten einen Punkt in einer der gegebenen Geraden, z. B. den Punkt a in der Geraden A, und ziehe die beliebigen Geraden ab, ac, von denen eine die Gerade B (in b), die andere die Gerade C (in c) schneidet, trage von a aus auf ab und ac die Längen ad und ae so, dass ad : ab = ae : ac (wie 1 : 2 z. B.) und ziehe durch d und e die zu den Geraden B und C resp. Parallelen D und E, so ist das von den Geraden A, D und E eingeschlossene Dreieck fgh dem ähnlich, welches von den Geraden A, B und C gebildet wird. Sucht man nun einen Punkt i, dessen Entfernungen von den Punkten f, g (in welchen Punkten sich die Geraden A und D, A und E schneiden) zu den gege-

benen Entfernungen beziehungsweise in demselben Verhältnisse stehen, wie ad : ab (in unserer Figur wie 1 : 2), zieht ai und trägt darauf von a aus eine Länge ak, welche sich zu ai wie ab : ad (in der Fig. = 2 : 1) verhält, so ist k der gesuchte Punkt.

Ist unter ähnlichen Voraussetzungen eine Gerade gesucht, so sucht man in der oben angegebenen Art zwei Punkte der Geraden. Dabei sind dann die den Punkten i und k entsprechenden (homologen) Geraden zu einander parallel.

Ist aber eine Gerade gesucht, die durch den Punkt a (Fig. 68.) und den Schnittpunkt der Geraden A und B geht, so kann man diese Gerade auch finden, wenn man zwei parallele Gerade bc, de zeichnet, welche die Geraden A, B in den Punkten b und c, d und e schneiden, und von denen eine (bc) durch a geht. Theilt man nun de durch den Punkt f so, dass df : fe = ba : bc, so ist f ein Punkt der gesuchten Geraden.

Druck von Bieling (Dietz) in Nürnberg.

benen Entfernungen beziehungsweise in demselben Verhältnisse stehen, wie ad : ab (in unserer Figur wie 1 : 2), zieht ai und trägt darauf von a aus eine Länge ak, welche sich zu ai wie ab : ad (in der Fig. = 2 : 1) verhält, so ist k der gesuchte Punkt.

Ist unter ähnlichen Voraussetzungen eine Gerade gesucht, so sucht man in der oben angegebenen Art zwei Punkte der Geraden. Dabei sind dann die den Punkten i und k entsprechenden (homologen) Geraden zu einander parallel.

Ist aber eine Gerade gesucht, die durch den Punkt a (Fig. 68.) und den Schnittpunkt der Geraden A und B geht, so kann man diese Gerade auch finden, wenn man zwei parallele Gerade bc, de zeichnet, welche die Geraden A, B in den Punkten b und c, d und e schneiden, und von denen eine (bc) durch a geht. Theilt man nun de durch den Punkt f so, dass df : fe = ba : bc, so ist f ein Punkt der gesuchten Geraden.

Druck von Bieling (Dietz) in Nürnberg.

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Klingenfeld, Friedrich A.,

Lehrbuch der darstellenden Geometrie

Bd.: 1

Nürnberg 1871

Bamberg, Staatsbibliothek -- Ma.o.190#1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11740031-8